

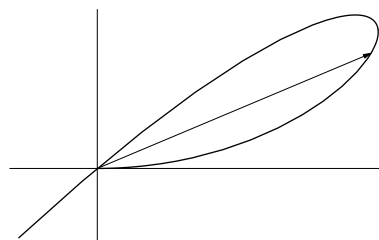
PRÁCTICA 6: CURVAS EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

I. Representación gráfica de curvas en el plano y en el espacio.

1. Información básica

En esta sección nos dedicamos a revisar dos ideas básicas sobre curvas en el plano y en el espacio: cómo se definen y cómo se dibujan.

Consideremos el sistema de coordenadas cartesianas habitual y observemos que conocer una curva C significa saber cuáles son todos sus puntos. Por ello, podemos representar una curva en el espacio C mediante la función vectorial $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, que nos indica cuáles son los puntos (x, y, z) de la curva a través del vector posición $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, y además, el parámetro t nos dice cuando pasa el móvil por cada punto de la curva C (suponiendo que el parámetro t mida el tiempo).



Se suele decir que la función vectorial $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es una *representación paramétrica de la curva C* .

La función vectorial $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ se representa gráficamente mostrando en un dibujo los puntos imagen (x, y, z) , como resultado aparecerá una curva C . El programa *Mathematica* usa órdenes diferentes para el caso de curvas en el plano y para el de curvas en el espacio.

■ Caso de curvas en el plano:

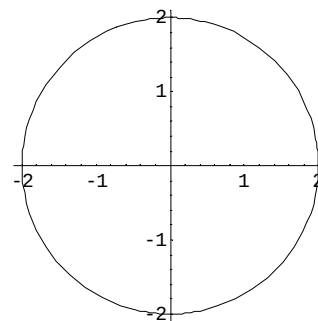
La orden `ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, tmin, tmax}]`; construye un arco de la curva plana con las coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ en función de t .

Por ejemplo, para dibujar la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ podemos decidir describirla del siguiente modo: $\begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases}$ donde $t \in [0, 2\pi]$.

Escribimos en *Mathematica*:

```
ParametricPlot[{2 Cos[t], 2 Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi},  
               AspectRatio -> Automatic];
```

y, al ejecutar la orden, nos muestra en pantalla el dibujo de al lado.



■ Caso de curvas en el espacio:

Al igual que en el caso de curvas en el plano, la orden

```
ParametricPlot3D[{x[t], y[t], z[t]}, {t, tmin, tmax}];
```

construye una curva en el espacio con las coordenadas $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ en función de t .

2. Ejercicios

Ejercicio 1: Dibuja usando *Mathematica* la espiral de Arquímedes $\begin{cases} x(t) = t \cdot \cos t \\ y(t) = t \cdot \sin t \end{cases}$ para $t \in [0, 2\pi]$

Ejercicio 2: Pídele a *Mathematica* que dibuje la curva plana $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$ que se conoce con el nombre de *lemniscata*. Para ello, escribe y ejecuta las siguientes órdenes:

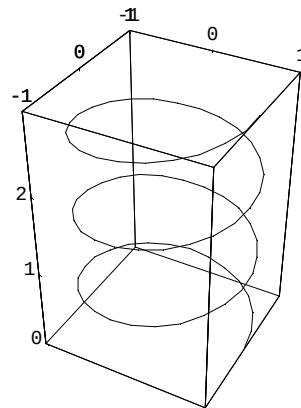
```
Clear[r, t];  
r[t_] = {Sin[t], Sin[2 t]};  
ParametricPlot[Evaluate[r[t]], {t, 0, 2 π}, AspectRatio -> Automatic,  
PlotLabel -> "Lemniscata"];
```

- Indica el punto donde comienza a dibujarse la curva. ¿Cuál es el sentido de su recorrido?
- Di las coordenadas y los valores del parámetro de los puntos en los que se alcanzan los máximos y mínimos de la segunda coordenada $y(t)$ y en los que se alcanzan los de la coordenada $x(t)$.
- ¿Cuál es la pendiente de la curva en los puntos del apartado b)?
- ¿Cuál es la pendiente en el punto de coordenadas $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, correspondiente a $t = \frac{\pi}{6}$?

Ejercicio 3: Comprueba que las siguientes órdenes dibujan tres vueltas completas de una hélice circular de radio 1 (curva en el espacio cuya proyección en el plano XY es una circunferencia de radio 1).

```
helice[t_] = {Cos[t], Sin[t],  $\frac{t}{2 \pi}$ };  
ParametricPlot3D[Evaluate[helice[t]], {t, 0, 6 π}];
```

¿Te aparece en pantalla un dibujo como el de al lado?



- Indica el punto donde comienza a dibujarse la curva. Escribe las coordenadas de tres puntos de la hélice que se sitúan sobre la vertical del punto de inicio.
- ¿Cuál es la máxima altura $z(t)$ a la que llega la hélice?

II. Vectores tangentes y vectores normales a una curva.

1. Información básica

■ Vector tangente o vector velocidad

La *derivada* o el *vector derivada* de una función vectorial $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es el vector

$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

obtenido derivando cada una de las funciones componentes. Interpretamos este vector derivada $\mathbf{r}'(t)$ de dos formas:

1. *Como vector tangente*: Para la Geometría, si C es la curva dada por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces el vector derivada $\mathbf{r}'(t)$ es un vector tangente a la curva C .

Conseguimos un *vector tangente unitario* sin más que dividir por la longitud: $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$.

2. *Como vector velocidad*: En Cinemática, si $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ representa un movimiento, entonces el vector derivada $\mathbf{r}'(t)$ es el vector velocidad $\mathbf{v}(t)$ del movimiento.

La velocidad escalar o rapidez del movimiento es la longitud del vector velocidad:

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}.$$

■ Vector normal

Si volvemos a derivar el vector $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ obtenemos el vector derivada segunda, que de nuevo tiene un significado físico: es el *vector aceleración* $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ del movimiento dado por $\mathbf{r}(t)$.

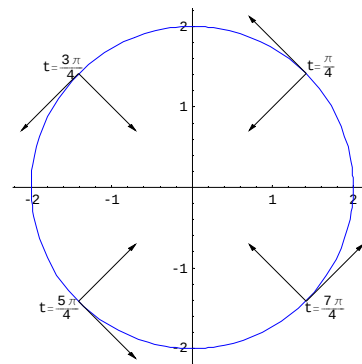
Pero, geométricamente $\mathbf{r}''(t)$ no es un vector destacable. Lo verdaderamente relevante es obtener un vector perpendicular al tangente, lo cual se consigue derivando el vector tangente unitario.

Se llama *vector normal unitario* al vector $\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$.

2. Ejercicios

Ejercicio 4: Si describimos la circunferencia de radio 2 mediante las ecuaciones paramétricas $r[t] = \{2\cos[t], 2\sin[t]\}$, $t \in [0, 2\pi]$, trata de completar las siguientes frases:

- El vector derivada o vector velocidad, $r'(t)$ o $v(t)$, es
- La velocidad del movimiento es
- El vector tangente unitario $T(t)$ es
- El vector derivada segunda o vector aceleración, $a(t) = r''(t)$, es
- En este caso, el vector $a(t) = r''(t)$ es a la circunferencia.
- El vector normal unitario $N(t)$ es



Ejercicio 5: Dibuja la parábola $y = x^2$ usando la orden **ParametricPlot[]**:

ParametricPlot[{x, x²}, {x, -2, 2}];

- Calcula el vector velocidad, la velocidad y el vector tangente unitario en los puntos $(-1,1)$ y $(1.5, 2.25)$.
- Calcula el vector aceleración y el vector normal unitario en esos mismos puntos.
- En las siguientes gráficas están dibujados los vectores calculados en los dos apartados anteriores. Señala en las gráficas cuál es cada uno de ellos.
- Dibuja en una de las gráficas las componentes tangencial y normal del vector aceleración en el punto $(-1,1)$.

