Autoras: Gloria Jarne, Esperanza Minguillón, Trinidad Zabal

EJERCICIOS RESUELTOS DE FRACCIONES

1. Simplificar las siguientes fracciones hasta obtener una irreducible:

a) $\frac{2475}{4125}$ **b)** $\frac{56}{2646}$ **c)** $\frac{215}{765}$

Solución

Para obtener la fracción irreducible, se descomponen numerador y denominador en producto de factores primos para eliminar aquellos que sean comunes a ambos.

a) $\frac{2475}{4125} = \frac{3^2.5^2.11}{3.5^3.11} = \frac{3}{5}$

b) $\frac{56}{2646} = \frac{2^3.7}{2.3^3.7^2} = \frac{2^2}{3^3.7} = \frac{4}{189}$

c) $\frac{215}{765} = \frac{5.43}{3^2.5.17} = \frac{43}{3^2.17} = \frac{43}{153}$

2. Escribir la forma fraccionaria más simplificada de los siguientes números racionales:

a) $32'75$ **b)** $24'\overset{\frown}{78}$ **c)** $32'7\overset{\frown}{501}$

Solución

a) Teniendo en cuenta que es un número decimal finito, su expresión fraccionaria se obtiene como sigue: $32'75 = \frac{3275}{100} = \frac{5^2.131}{2^2.5^2} = \frac{131}{4}$

b) Al ser un número decimal periódico puro se tiene: $24'\overset{\frown}{78} = \frac{2478-24}{99} = \frac{2454}{99} = \frac{3.818}{3.33} = \frac{818}{33}$

c) Al ser un número decimal periódico mixto se tiene:

$$32'7\overset{\frown}{501} = \frac{327501-327}{9990} = \frac{327174}{9990} = \frac{6.54529}{6.1665} = \frac{54529}{1665}$$

3. Realizar las siguientes operaciones, simplificando el resultado:

a) $\frac{3}{20} - \frac{8}{15} + \frac{37}{30}$ **b)** $\frac{21}{4}\left(\frac{15}{7} - \frac{17}{3}\right)$ **c)** $\left(\frac{11}{6} - \frac{41}{9}\right) : \frac{14}{15}$ **d)** $\frac{1}{6} : \left(\frac{4}{3} . \frac{2}{5}\right)$ **e)** $\frac{1}{6} : \frac{4}{3} . \frac{2}{5}$

Solución

a) Teniendo en cuenta que el común denominador de unas fracciones es el mínimo común múltiplo de los denominadores y que $20 = 2^2.5$, $15 = 3.5$ y $30 = 2.3.5$ se tiene:

$$\text{m.c.m}(20,\ 15,\ 30) = 2^2.3.5 = 60$$

Por tanto, $\frac{3}{20} - \frac{8}{15} + \frac{37}{30} = \frac{3.3 - 8.4 + 37.2}{60} = \frac{9 - 32 + 74}{60} = \frac{51}{60} = \frac{3.17}{3.20} = \frac{17}{20}$

b) $\frac{21}{4}\left(\frac{15}{7}-\frac{17}{3}\right)=\frac{21.15}{4.7}-\frac{21.17}{4.3}=\frac{3.15}{4}-\frac{7.17}{4}=\frac{45-119}{4}=\frac{-74}{4}=-\frac{2.37}{2.2}=-\frac{37}{2}$

Hemos aplicado la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, también se puede obtener el resultado realizando en primer lugar la diferencia del paréntesis y después hacer el producto.

c) $\left(\frac{11}{6}-\frac{41}{9}\right):\frac{14}{15}=\left(\frac{33}{18}-\frac{82}{18}\right):\frac{14}{15}=\frac{-49}{18}.\frac{15}{14}=\frac{-7^2.3.5}{2.3^2.2.7}=\frac{-7.5}{2.3.2}=\frac{-35}{12}$

Se ha obtenido el resultado realizando en primer lugar la diferencia del paréntesis y después para hacer la división hemos multiplicado por la fracción inversa. También se podía haber aplicado la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

d) $\frac{1}{6}:\left(\frac{4}{3}.\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{6}:\frac{8}{15}=\frac{15}{48}=\frac{5}{16}$

En primer lugar se ha realizado la operación que hay dentro del paréntesis.

e) $\frac{1}{6}:\frac{4}{3}.\frac{2}{5}=\frac{3}{24}.\frac{2}{5}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$

Se han de realizar las operaciones empezando por la de la izquierda.

4. Una tarta pesa 1´6 kg. Si se divide en ocho partes iguales y se da una parte a cada uno de los 5 miembros de una familia, ¿cuánto pesa el trozo de tarta que ha sobrado?

Solución

Cada ración pesa $\frac{1´6}{8}=0´2$ kg. Por tanto, las 3 raciones que han sobrado pesan 3. 0´2 = 0´6 kg.

5. De un tonel de vino se han extraído los dos séptimos, quedando 15 litros, ¿cuántos litros de vino había inicialmente?

Solución

Si del tonel se han extraído $\frac{2}{7}$ quedan $\frac{5}{7}$ que corresponden a 15 litros, entonces un séptimo tendrá $\frac{15}{5}=3$ litros. Por tanto, en el tonel inicialmente había 7.3 = 21 litros.

También podemos resolverlo planteando una ecuación: Si x es el número de litros que había inicialmente en el tonel, se cumple: $\frac{5}{7}x = 15$, de donde, $x = \frac{15.7}{5}=21$ litros.

6. Realizar las siguientes operaciones:

a) $\frac{4}{x-y}-\frac{7}{y-x}$ **b)** $\frac{x+y}{2}-\frac{5-x^2}{y-x}$ **c)** $\frac{x-y}{2x}+\frac{5-y}{3-x}$ **d)** $\frac{xy}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$

e) $\frac{4-x}{x^2-3x}-\frac{2x+7}{x^2-6x+9}$ **f)** $\frac{x+3}{2x^2+1}-\frac{5}{1-2x}$ **g)** $\frac{x^2+3x+2}{x(x+2)^3(x+1)}-\frac{1}{x(x+2)(x+5)}$

Solución

a) Teniendo en cuenta que los denominadores son opuestos, es decir que $y - x = -(x - y)$, se tiene:

$$\frac{4}{x-y} - \frac{7}{y-x} = \frac{4}{x-y} + \frac{7}{x-y} = \frac{11}{x-y}$$

b) $\dfrac{x+y}{2} - \dfrac{5-x^2}{y-x} = \dfrac{(x+y)(y-x)}{2(y-x)} - \dfrac{2(5-x^2)}{2(y-x)} = \dfrac{y^2 - x^2 - 10 + 2x^2}{2(y-x)} = \dfrac{y^2 + x^2 - 10}{2(y-x)}$

c) Como m.c.m.$(2x, 3-x) = 2x(3-x)$ se tiene:

$$\frac{x-y}{2x} + \frac{5-y}{3-x} = \frac{(x-y)(3-x) + 2x(5-y)}{2x(3-x)} = \frac{3x - 3y - x^2 + xy + 10x - 2xy}{2x(3-x)} = \frac{-x^2 - xy + 13x - 3y}{2x(3-x)}$$

d) $\dfrac{xy}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}} = \dfrac{xy}{\dfrac{y-x}{xy}} = \dfrac{x^2y^2}{y-x}$

e) Factorizando los polinomios de los denominadores se tiene:

$x^2 + 3x = x(x+3)$ y $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$, luego m.c.m.$(x^2 + 3x, x^2 + 6x + 9) = x(x+3)^2$

Por tanto, $\dfrac{4-x}{x^2+3x} - \dfrac{2x+7}{x^2+6x+9} = \dfrac{4-x}{x(x+3)} - \dfrac{2x+7}{(x+3)^2} = \dfrac{(4-x)(x+3) - x(2x+7)}{x(x+3)^2} =$

$$= \frac{4x - x^2 + 12 - 3x - 2x^2 - 7x}{x(x+3)^2} = \frac{-3x^2 - 6x + 12}{x(x+3)^2}$$

f) Como el polinomio $2x^2 + 1$ no tiene raíces reales, no se puede factorizar, por tanto, m.c.m.$(2x^2 + 1, 1 - 2x) = (2x^2 + 1)(1 - 2x)$ y se tiene que

$$\frac{x+3}{2x^2+1} - \frac{5}{1-2x} = \frac{x - 2x^2 + 3 - 6x - 10x^2 - 5}{(2x^2+1)(1-2x)} = \frac{-12x^2 - 5x - 2}{(2x^2+1)(1-2x)} = \frac{12x^2 + 5x + 2}{(2x^2+1)(2x-1)}$$

g) Antes de realizar la diferencia veamos si alguna de las fracciones se puede simplificar. En la primera fracción, la raíz $x = -1$ del denominador también lo es del numerador, por tanto, en dicha fracción se podrá simplificar el factor $x+1$.

$$\frac{x^2+5x+4}{x(x+2)^2(x+1)} - \frac{1}{x(x+2)(x+5)} = \frac{(x+1)(x+4)}{x(x+2)^2(x+1)} - \frac{1}{x(x+2)(x+5)} = \frac{x+4}{x(x+2)^2} - \frac{1}{x(x+2)(x+5)} =$$

$$= \frac{(x+4)(x+5) - (x+2)}{x(x+2)^2(x+5)} = \frac{x^2 + 9x + 20 - x - 2}{x(x+2)^2(x+5)} = \frac{x^2 + 8x + 18}{x(x+2)^2(x+5)}$$