

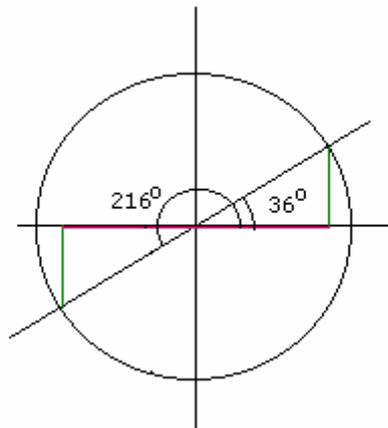
## EJERCICIOS RESUELTOS DE TRIGONOMETRÍA

1. Escribir las razones trigonométricas del ángulo de  $3456^\circ$  en función de las de un ángulo positivo menor que  $45^\circ$ .

### Solución

Al representar el ángulo de  $3456^\circ$  en la circunferencia unidad, después de haber dado varias vueltas completas a la circunferencia, su segundo lado corresponderá con el segundo lado de un ángulo menor de  $360^\circ$ . Dicho ángulo es el resto obtenido al dividir  $3456^\circ$  entre  $360^\circ$  y el cociente es el número de vueltas que se dan a la circunferencia.

Realizando la división se obtiene que  $3456 = 9 \cdot 360 + 216$  y, por tanto, las razones trigonométricas de  $3456^\circ$  coinciden con las de  $216^\circ$ .



Teniendo en cuenta lo anterior y que  $216^\circ - 180^\circ = 36^\circ$  o lo que es lo mismo  $216^\circ = 180^\circ + 36^\circ$  se tiene:

$$\sin 3456^\circ = \sin 216^\circ = -\sin 36^\circ \quad \cos 3456^\circ = \cos 216^\circ = -\cos 36^\circ$$

$$\text{Por otra parte, } \operatorname{tg} 3456^\circ = \operatorname{tg} 216^\circ = \frac{\sin 216^\circ}{\cos 216^\circ} = \frac{-\sin 36^\circ}{-\cos 36^\circ} = \operatorname{tg} 36^\circ$$

2. Sabiendo que  $\cos 100^\circ \approx -0,17$ , calcular las razones trigonométricas de  $\alpha = 200^\circ$  y  $\beta = 50^\circ$ .

### Solución

El ángulo de  $200^\circ$  es el doble del ángulo de  $100^\circ$ , por tanto aplicando las fórmulas trigonométricas del ángulo doble se tiene:

$$\sin 200^\circ = 2 \sin 100^\circ \cos 100^\circ \quad \cos 200^\circ = \cos^2 100^\circ - \sin^2 100^\circ$$

Para obtener estas razones trigonométricas hay que tener en cuenta que  $\sin 100^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 100^\circ} = \sqrt{1 - (-0,17)^2} \approx \sqrt{0,9711} \approx 0,9854$ . Por tanto,

$$\sin 200^\circ = 2 \sin 100^\circ \cos 100^\circ \approx 2 \cdot 0,9854 \cdot (-0,17) \approx -0,3350$$

$$\cos 200^\circ = \cos^2 100^\circ - \sin^2 100^\circ \approx 0,0289 - 0,9711 = -0,9422$$

Conocidos los valores del seno y del coseno se tiene  $\operatorname{tg} 200^\circ = \frac{\operatorname{sen} 200^\circ}{\operatorname{cos} 200^\circ} \approx \frac{-0,3350}{-0,9422} \approx -0,3556$

El ángulo de  $50^\circ$  es la mitad del ángulo de  $100^\circ$ , por tanto aplicando las fórmulas trigonométricas del ángulo mitad se tiene:

$$|\operatorname{sen} 50^\circ| = \left| \operatorname{sen} \frac{100^\circ}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} 100^\circ}{2}} \approx \sqrt{\frac{1 - (-0,17)}{2}} = \sqrt{0,585} \approx 0,7649$$

$$|\operatorname{cos} 50^\circ| = \left| \operatorname{cos} \frac{100^\circ}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} 100^\circ}{2}} \approx \sqrt{\frac{1 - 0,17}{2}} = \sqrt{0,415} \approx 0,6442$$

Se acaban de obtener el valor absoluto del seno y del coseno, ahora es necesario determinar su signo. Al estar el ángulo de  $50^\circ$  en el primer cuadrante todas sus razones trigonométricas son positivas, por tanto:

$$\operatorname{sen} 50^\circ \approx 0,7649, \operatorname{cos} 50^\circ \approx 0,6442 \text{ y en consecuencia } \operatorname{tg} 50^\circ = \frac{\operatorname{sen} 50^\circ}{\operatorname{cos} 50^\circ} \approx \frac{0,7649}{0,6442} \approx 1,1874$$

3. Simplificar las siguientes expresiones:

a)  $\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$

b)  $\frac{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)}{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)}$

c)  $\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha (1 + \operatorname{cos} \alpha)}{1 - \operatorname{cos} \alpha}$

d)  $\frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{sen} \alpha)}$

**Solución**

a)  $\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}} = 2 \operatorname{cos}^2 \alpha$

b)  $\frac{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)}{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{-\operatorname{tg} \alpha} = -1$

c)  $\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha (1 + \operatorname{cos} \alpha)}{1 - \operatorname{cos} \alpha} = \frac{(1 - \operatorname{cos}^2 \alpha)(1 + \operatorname{cos} \alpha)}{1 - \operatorname{cos} \alpha} = \frac{(1 - \operatorname{cos} \alpha)(1 + \operatorname{cos} \alpha)(1 + \operatorname{cos} \alpha)}{1 - \operatorname{cos} \alpha} = (1 + \operatorname{cos} \alpha)^2 \otimes$

En la primera igualdad se ha tenido en cuenta que  $\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \operatorname{cos}^2 \alpha$  y en la segunda se ha aplicado que una diferencia de cuadrados es igual a la suma por la diferencia.

d)  $\frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{sen} \alpha)} = \frac{\operatorname{cos} \alpha}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} (1 - \operatorname{sen} \alpha)} = \frac{\operatorname{cos}^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha (1 - \operatorname{sen} \alpha)} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha (1 - \operatorname{sen} \alpha)} = \frac{(1 + \operatorname{sen} \alpha)(1 - \operatorname{sen} \alpha)}{\operatorname{sen} \alpha (1 - \operatorname{sen} \alpha)} = \frac{1 + \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} =$   
 $= \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} + 1$

4. Resolver las siguientes ecuaciones: a)  $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x$

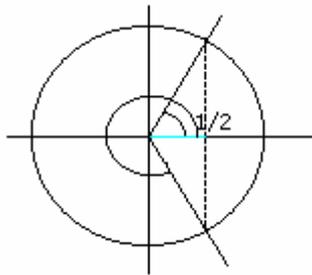
b)  $\frac{2}{\operatorname{sen} x} = \frac{3}{\operatorname{cos}^2 x}$

**Solución**

a) Sustituyendo en la ecuación inicial la expresión del seno del ángulo doble,  $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x$ , se obtiene la ecuación  $2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x = \operatorname{sen} x$ .

Pasando  $\operatorname{sen} x$  al primer miembro y sacándolo factor común se obtiene  $\operatorname{sen} x (2 \cos x - 1) = 0$ , de donde,  $\operatorname{sen} x = 0$  o  $2 \cos x - 1 = 0$ . Resolviendo cada una de las ecuaciones anteriores se tiene:

- $\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .
- $2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2 \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ . Los ángulos positivos menores que  $360^\circ$  cuyo coseno es  $\frac{1}{2}$  son  $\frac{\pi}{3}$  y  $\frac{5\pi}{3}$ , por tanto, las soluciones serán esos ángulos y los que se obtienen sumando un número entero de vueltas a la circunferencia.



Por tanto, las soluciones de la ecuación inicial son  $x = k\pi$ ,  $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  y  $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .

**b)** Para resolver la ecuación inicial es conveniente que aparezca una única razón trigonométrica, para ello se sustituye  $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ , quedando  $\frac{2}{\operatorname{sen} x} = \frac{3}{1 - \operatorname{sen}^2 x}$ , y pasando todo al primer

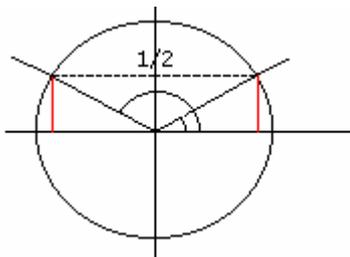
miembro se obtiene,  $\frac{2(1 - \operatorname{sen}^2 x) - 3\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen}^2 x)} = 0$ .

Las soluciones serán los valores de  $x$  para los que el numerador sea nulo,  $2 - 3\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^2 x = 0$ , y no anulen el denominador, es decir, las que verifiquen  $\operatorname{sen} x \neq 0$  y  $\operatorname{sen}^2 x \neq 1$ .

Al ser  $2 - 3\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^2 x = 0$  una ecuación de segundo grado con incógnita  $\operatorname{sen} x$  se tiene

$$\operatorname{sen} x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{-4} = \frac{3 \pm 5}{-4} = \begin{cases} -2 \\ 1/2 \end{cases}$$

El valor del seno siempre está entre -1 y 1, por tanto de los dos valores obtenidos, el único a considerar es  $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ . (Observar que se verifica  $\operatorname{sen} x \neq 0$  y  $\operatorname{sen}^2 x \neq 1$ )

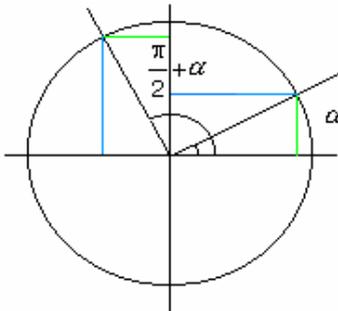


Los ángulos  $\frac{\pi}{6}$  y  $\frac{5\pi}{6}$  son los únicos positivos menores que  $360^\circ$  que tienen el seno igual a  $\frac{1}{2}$ , por tanto, las soluciones serán esos ángulos y los que se obtienen sumando un número entero de vueltas a la circunferencia, es decir, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ y } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

5. Escribir las razones trigonométricas de  $\frac{\pi}{2} + \alpha$  en función de las del ángulo  $\alpha$ .

### Solución



En la figura anterior se observa que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha$$

$$\text{y en consecuencia } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\operatorname{cos}\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha} = \frac{-1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

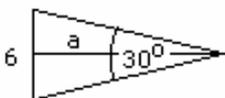
6. Calcular el área de un dodecágono regular cuyo lado mide 6 cm.

### Solución

El área de un polígono regular es  $\frac{P \cdot a}{2}$  siendo  $P$  el perímetro y  $a$  el apotema (segmento que une el centro del polígono con el punto medio de un lado).

El perímetro es  $P = 12 \cdot 6 = 72$  cm.

Para calcular el apotema se considera la parte del dodecágono correspondiente a un lado, es un triángulo isósceles cuyo ángulo opuesto al lado del polígono es igual a  $\frac{360}{12} = 30^\circ$ , y se representa a continuación.



Considerando la mitad de este triángulo isósceles se obtiene el triángulo rectángulo que tiene un cateto igual a 3 y el ángulo opuesto igual a  $\frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$

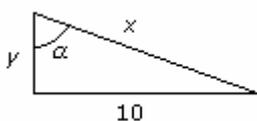
de donde  $\operatorname{tg}15^\circ = \frac{3}{a}$ , por tanto,  $a = \frac{3}{\operatorname{tg}15^\circ} \approx \frac{3}{0,2679} \approx 11,1982$  cm.

Sustituyendo en el área del dodecágono se tiene  $A = \frac{P \cdot a}{2} \approx \frac{72 \cdot 11,1982}{2} = 403,1352$  cm<sup>2</sup>.

7. De un triángulo rectángulo se sabe que un cateto mide 10 cm. y que el ángulo opuesto a dicho cateto tiene por coseno 0,4. Calcular la longitud del otro cateto y de la hipotenusa.

### Solución

Se denota  $x$  a la longitud de la hipotenusa e  $y$  a la longitud del cateto



En la figura se observa que  $\operatorname{sen}\alpha = \frac{10}{x}$  y  $\operatorname{cos}\alpha = \frac{y}{x}$ .

Al ser  $\operatorname{cos}\alpha = 0,4$  se tiene  $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \operatorname{cos}^2\alpha} = \sqrt{1 - 0,16} = \sqrt{0,84} \approx 0,9165$

y sustituyendo este valor en la igualdad  $\operatorname{sen}\alpha = \frac{10}{x}$  queda  $0,9165 \approx \frac{10}{x}$ ,

$$\text{de donde } x \approx \frac{10}{0'9165} \approx 10'9111$$

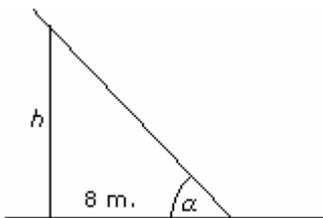
Sustituyendo  $\cos\alpha = 0'4$  y  $x \approx 10'9111$  en  $\cos\alpha = \frac{y}{x}$  queda  $0'4 \approx \frac{y}{10'9111}$  y despejando se tiene

$$y \approx 0'4 \cdot 10'9111 = 4'3644.$$

Así, aproximadamente la longitud del cateto es 4'3644 cm. y la de la hipotenusa 10'9111 cm.

**8.** Calcular la altura de una torre sabiendo que proyecta una sombra de 8 m. cuando los rayos de sol inciden sobre la tierra con un ángulo cuya tangente es 1'6351.

### Solución



Llamando  $h$  a la altura de la torre y observando la figura se tiene  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{8}$  y como  $\operatorname{tg}\alpha = 1'6351$  igualando queda  $\frac{h}{8} = 1'6351$ , de donde  $h = 8 \cdot 1'6351 = 13'0808$  m.