EJERCICIOS RESUELTOS DE SISTEMAS LINEALES

1. Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{matrix} 2x + 3y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{matrix}\right\}$

a) Escribir la expresión matricial del sistema.

b) Discutir el sistema.

c) Resolver el sistema por el método de Gauss.

d) Estudiar si el sistema es de Cramer, y en caso afirmativo, calcular su solución matricialmente y por la regla de Cramer.

Solución

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) Escribimos la matriz ampliada del sistema dado y la escalonamos mediante operaciones elementales por filas. Observar que en este proceso también se escalona A.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rg } A = 2 = \text{rg}(A|B) = \text{nº de incógnitas}$$

Aplicando el teorema de Rouche-Frobenius se deduce que el sistema es compatible determinado, es decir, tiene una única solución.

c) Teniendo en cuenta que $(A|B) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$, el sistema $\left.\begin{matrix} 2x+3y = 3 \\ -y = 0 \end{matrix}\right\}$ es equivalente al inicial.

De la segunda ecuación se obtiene $y = 0$, y sustituyendo en la primera $2x + 3.0 = 3$, por tanto, $x = \frac{3}{2}$

Luego la solución del sistema es $x = \frac{3}{2}$, $y = 0$

d) Como A es cuadrada y $|A| = 10 - 12 = -2 \neq 0$, el sistema dado es un sistema de Cramer y lo podemos resolver bien por cálculo matricial o bien por la regla de Cramer.

Cálculo matricial

$X = A^{-1}B$, es decir, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Hallamos A^{-1} mediante operaciones elementales:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & | & 1 & 0 \\ 4 & 5 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & | & 1 & 0 \\ 0 & -1 & | & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_1 \to F_1 + 3F_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & | & -5 & 3 \\ 0 & -1 & | & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_1 \to 1/2\, F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -5/2 & 3/2 \\ 0 & -1 & | & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to -F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -5/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & | & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y por tanto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-5/2).3+(3/2).6 \\ 2.3 + (-1).6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

La solución del sistema es $x = \dfrac{3}{2}$, $y = 0$.

Regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}\ , \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{0}{-2} = 0$$

2. Discutir y resolver el sistema homogéneo: $\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}\right\}$

Solución

Por ser un sistema homogéneo es compatible. Calculamos el rango de *A* para determinar el número de soluciones que posee.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - F_1\ ,\ F_3 \to F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, rg*A* = 2, por tanto el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones. El grado de indeterminación de sistema es 3 – rg*A* = 3 - 2 = 1, por lo que la solución dependerá de un parámetro .

Para calcular la solución del sistema dado se resuelve el sistema equivalente asociado a la matriz escalonada que es $\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ -3y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$

De la última ecuación se obtiene $3y = 2z$, luego, $y = \dfrac{2z}{3}$

Sustituyendo en la primera, $x + \dfrac{2z}{3} - z = x - \dfrac{z}{3} = 0$, luego $x = \dfrac{z}{3}$

Por lo tanto, las soluciones del sistema es $x = \dfrac{z}{3}$, $y = \dfrac{2z}{3}$, z un número real cualquiera.

3. Dado el sistema lineal $\left.\begin{aligned} x+y+2z+3t &= -1 \\ -x-2y-3z-4t &= 0 \\ 2x+3y+5z+7t &= 1 \\ 2x+2y+4z+6t &= 2 \end{aligned}\right\}$, indicar si tiene solución y calcularla en este caso.

Solución

Escalonamos la matriz ampliada para determinar el rango de A y de $(A|B)$

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & -1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & | & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & | & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & | & 2 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 + F_1,\ F_3 \to F_3 - 2F_1,\ F_4 \to F_4 - 2F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 4 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 4 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_4 \to F_4 - 2F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & | & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

rg$A$ = 2 $\neq$ rg $(A|B)$ = 3 $\Rightarrow$ el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.

4. Hallar para qué valores de a el siguiente sistema es compatible determinado y calcular su solución para esos valores: $\left.\begin{aligned} x+y-z &= 1 \\ x-y+z &= 7 \\ -x+y+z &= 3 \\ 2x+ay-4z &= a \end{aligned}\right\}$

Solución

Estudiamos los rangos de A y de $(A|B)$, escalonando la matriz ampliada .

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 7 \\ -1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & a & -4 & | & a \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \to F_2 - F_1,\ F_3 \to F_3 + F_1,\ F_4 \to F_4 - 2F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 2 & | & 6 \\ 0 & 2 & 0 & | & 4 \\ 0 & a-2 & -2 & | & a-2 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_3 \to F_3 + F_2,\ F_4 \to 2F_4 + (a-2)F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 2 & | & 6 \\ 0 & 0 & 2 & | & 10 \\ 0 & 0 & 2(a-4) & | & 8(a-2) \end{pmatrix}$$

$$\underset{\approx}{F_4 \to F_4 - (a-4)F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 2 & | & 6 \\ 0 & 0 & 2 & | & 10 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2a+24 \end{pmatrix}$$

En este caso rg$A$ = 3 independientemente del valor de a y como el número de incógnitas es también 3 para que el sistema sea compatible determinado debe ocurrir que rg($A|B$) sea 3.

rg ($A|B$) = 3 si $-2a + 24 = 0 \Rightarrow a = \frac{-24}{-2} = 12$

Resolvamos el sistema para a = 12 por el método de Gauss.

$(A|B) \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 2 & | & 6 \\ 0 & 0 & 2 & | & 10 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ luego el sistema a resolver es $\left.\begin{aligned} x+y-z&=1 \\ -2y+2z&=6 \\ 2z&=10 \end{aligned}\right\}$ despejando

$2z = 10 \Rightarrow z = 5$

$-2y + 2z = 6 \Rightarrow -2y = 6 - 2z = 6 - 2.5 = -4 \Rightarrow y = 2$

$x + y - z = 1 \Rightarrow x = 1 - y + z = 1 - 2 + 5 = 4 \Rightarrow x = 4$

Por tanto, la solución para a = 12 es x = 4, y = 2, z = 5.

5. Determinar los valores reales de a, para que el siguiente sistema tenga: solución única, infinitas soluciones y ninguna. Resolverlo en los casos en que sea posible.

$$\left.\begin{aligned} x + ay + 3z &= 2 \\ x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Solución

Para estudiar los rangos de A y ($A|B$), escalonamos la matriz ampliada

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 & | & 2 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 2 & 3 & a & | & 3 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & a & 3 & | & 2 \\ 2 & 3 & a & | & 3 \end{pmatrix} F_2 \to F_2 - F_1, \underset{\approx}{F_3} \to F_3 - 2F_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & | & 1 \end{pmatrix} \underset{\approx}{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & | & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & | & 1 \end{pmatrix} F_3 \to F_3 \underset{\approx}{+} (1-a)\, F_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & | & 1 \\ 0 & 0 & -a^2-a+6 & | & 2-a \end{pmatrix}$$

La primera operación elemental ($\underset{\approx}{F_1 \leftrightarrow F_2}$) tiene por objeto que el parámetro a figure en una fila inferior lo que facilita los cálculos.

El rango de A depende de si es nula o no la expresión $-a^2 - a + 6$

$-a^2 - a + 6 = 0 \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow a = 2$ y $a = -3$

Casos:

• $a \neq 2, -3 \;\Rightarrow\; -a^2 - a + 6 \neq 0 \;\Rightarrow\;$ rgA = rg (A|B) = 3 = nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado, es decir, tiene una única solución para cada valor de a distinto de 2 y de -3.

Vamos a hallar la solución resolviendo el sistema asociado a la matriz escalonada comenzando a despejar z en la última ecuación y sustituyendo en las anteriores:

$$(-a^2-a+6)\,z = 2-a \quad \Rightarrow \quad z = \frac{2-a}{-a^2-a+6} = \frac{-(a-2)}{-(a-2)(a+3)} = \frac{1}{a+3}$$

$$y + (a+2)\,z = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1 - (a+2)z = 1 - \frac{(a+2)}{(a+3)} = \frac{a+3-a-2}{a+3} = \frac{1}{a+3}$$

$$x + y - z = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1 - y + z = 1 - \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a+3} = 1$$

La solución es $x = 1$, $y = \dfrac{1}{a+3}$, $z = \dfrac{1}{a+3}$

• $a = 2$, en este caso, $(A|B) \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rg$A$ = rg $(A|B)$ = 2 < nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones que vamos a calcular resolviendo el sistema asociado a la matriz escalonada

$y + 4z = 1 \;\Rightarrow\; y = 1 - 4z$

$x + y - z = 1 \Rightarrow x = 1 - 1 + 4z + z = 5z$

Las soluciones son $x = 5z$, $y = 1 - 4z$, $z \in$ Ñ

• $a = -3$, en este caso, $(A|B) \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rg$A$ = 2 $\neq$ rg $(A|B)$ = 3 $\Rightarrow$ el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.

6. Estudiar según los valores de a si el siguiente sistema es de Cramer y calcula en estos casos su solución. $\left.\begin{aligned} 2x - y + 4z &= 3 \\ 5x - y + az &= 10 \\ x + y + 3z &= 4 \end{aligned}\right\}$

Solución

Como el número de ecuaciones del sistema coincide con el de incógnitas, será un sistema de Cramer si $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & a \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 - a + 20 + 4 - 2a + 15 = -3a + 33 = -3(a - 11)$$

Por lo tanto, si $a \neq 11 \Rightarrow |A| \neq 0$ y el sistema es un sistema de Cramer y por ello compatible determinado, es decir, con solución única para cada valor de a distinto de 11.

Para resolverlo utilizaremos la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 10 & -1 & a \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-3(a-11)} = \frac{-9-4a+40+16-3a+30}{-3(a-11)} = \frac{-7a+77}{-3(a-11)} = \frac{-7(a-11)}{-3(a-11)} = \frac{7}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 10 & a \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{-3(a-11)} = \frac{60+3a+80-40-8a-45}{-3(a-11)} = \frac{-5a+55}{-3(a-11)} = \frac{-5(a-11)}{-3(a-11)} = \frac{5}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{-3(a-11)} = \frac{-8-10+15+3-20+20}{-3(a-11)} = \frac{0}{-3(a-11)} = 0$$

Observar que en este caso el valor de x, y, z es independiente de a.