Probabilidad y variable aleatoria

Probabilidad

Interpretaciones de probabilidad: clásica (Laplace), frecuentista, axiomática
Definición axiomática de probabilidad:

$$\begin{array}{ll} \text{ax. 1} & \mathbf{p}(A) \geq 0, \\ \text{ax. 2} & \mathbf{p}(E) = 1, \\ \text{ax. 3} & \mathbf{p}(A \cup B) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B), \quad A \cap B = \phi, \\ & \mathbf{p}(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \mathbf{p}(A_1) + \mathbf{p}(A_2) + \cdots, \quad A_i \cap A_j = \phi. \end{array}$$

Consecuencias:

$$\mathbf{p}(\phi) = 0, \quad \mathbf{p}(A^C) = 1 - \mathbf{p}(A), \quad \mathbf{p}(A \cup B) = \mathbf{p}(A) + \mathbf{p}(B) - \mathbf{p}(A \cap B).$$

Ejercicio. Sucesos en el lanzamiento de un dado:

$$A = \{\text{par}\},\ B = \{3{,}4\},\ C = \{\text{impar}\},\ D = \{1\},\ E = \{\dot{3}\},\ F = \{\geq 5\}$$

escribir los siguientes sucesos y calcular sus probabilidades:

$$A \cup B,\ A \cup D,\ B \cup E,\ A \cap E,\ B \cap E,\ E \cap C,\ \overline{B},\ \overline{A} \cup B,\ C \cap \overline{B}, \dots$$

Variable aleatoria. Distribuciones de probabilidad

El concepto de variable aleatoria nos proporciona un medio para relacionar cualquier resultado con una medida cuantitativa. Esto nos permite estudiar el comportamiento aleatorio de cualquier experimento.

- Con la variable aleatoria cuantificamos los resultados asociados al experimento aleatorio, por tanto es una aplicación de la forma $X : E \to \mathbb{R}$. Digamos que X transforma todos los posibles resultados en una cantidad numérica.

- Tenemos dos tipos de variables aleatorias: discreta y continua.

- Es aleatoria porque involucra la probabilidad de los resultados.

- El conjunto de valores que puede tomar la variable aleatoria, junto con sus probabilidades es lo que denominamos distribución de probabilidad.

Charo Ferrerira Gonz§lez — MATEMÁTICA APLICADA - Universidad de Zaragoza

Distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta

La variable X toma valores en un conjunto discreto.

- Función de masa $p(x) = \mathbf{p}(X = x)$, con las siguientes propiedades:
  1. $p(x) \geq 0$ para todos los valores x de X.
  2. $\sum_X p(x) = 1$.
- Función de distribución $F(x) = \mathbf{p}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$

Ejemplos: distribución Binomial $\mathcal{B}(n,p)$, distribución de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua

La variable X toma valores en un intervalo de la recta real. Ahora no es posible asignar valores puntuales a la variable aleatoria. La probabilidad de que una variable aleatoria continua tome un valor específico x es cero.

- Función de densidad de probabilidad $f(x)$, (¡$\neq p(x)$!), con las siguientes propiedades:
  1. $f(x) \geq 0, \; -\infty < x < \infty$.
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.
  3. $\mathbf{p}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.
- Función de distribución $F(x) = \mathbf{p}(X \leq x) =$ área

Ejemplo: distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Características que “resumen” la distribución de probabilidad de una variable aleatoria

Igual que en un análisis de datos, tenemos una serie de medidas que describen la distribución de probabilidad de una variable aleatoria. Nos centraremos en la media (μ) y la varianza (σ^2).

Variable aleatoria estandarizada correspondiente a la variable X.

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

La variable Y tiene media cero ($\mu = 0$) y desviación estándar uno (σ^2=1).

Distribuciones de probabilidad

Distribución Binomial $\mathcal{B}(n, p)$

- Una propiedad dicotómica: contaminado-no contaminado, vivo-muerto, tóxico-no tóxico, sano-enfermo,...

- Hipótesis: n ensayos <u>independientes</u>
probabilidad de éxito p <u>constante</u>

En estas condiciones, se define la variable aleatoria siguiente:

$$X = \text{“número de éxitos en } n \text{ ensayos”} \sim \mathcal{B}(n, p),$$

con la siguiente medida de probabilidad:

$$\mathbf{p}\left(X = x\right) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

que es la probabilidad de tener x éxitos en n ensayos.

Distribución de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

- Eventos independientes y velocidad constante.

- Promedio de eventos por unidad de tiempo o espacio λ

En estas condiciones, se define la variable aleatoria siguiente:

$$X = \begin{array}{l} \text{“número de eventos independientes que ocurren con tasa} \\ \text{de ocurrencia por unidad tiempo o espacio constante”} \end{array}$$

con la siguiente medida de probabilidad:

$$\mathbf{p}\left(X = x\right) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x \geq 0$$

Una propiedad interesante es que la distribución Binomial se aproxima a una Poisson de forma adecuada para valores grandes de n y pequeños de p.

$$\mathcal{B}(n, p) \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathcal{P}(np)$$

Distribución Normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

- Variables físicas y biomédicas.
- Inferencia estadística en el análisis de datos.

Se define la variable aleatoria normal de parámetros μ y σ ($\mathcal{N}(\mu, \sigma)$), con la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \qquad \mathbf{p}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Es una medida de probabilidad continua.

Recordemos la transformación que nos permite tener una variable normal estandarizada (con media 0 y desviación 1):

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \qquad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Una propiedad interesante es que la siguiente aproximación

$$\mathcal{B}(n, p) \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$$