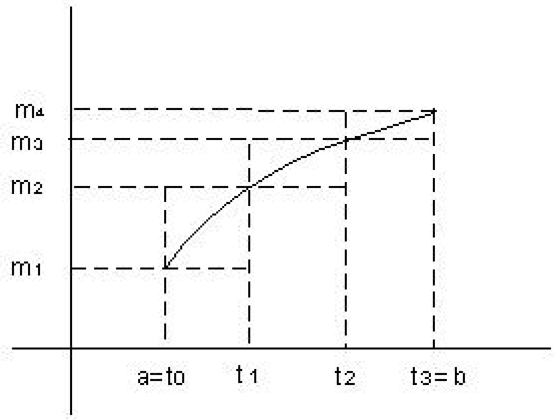
CAPÍTULO 1. INTEGRAL DE RIEMANN

Capítulo 1
Integral de Riemann

http://scienceworld.wolfram.com/biography/Riemann.html

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

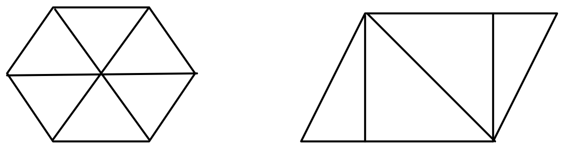


Capítulo 1
Integral de Riemann

Volver al Índice

1.1. Introducción

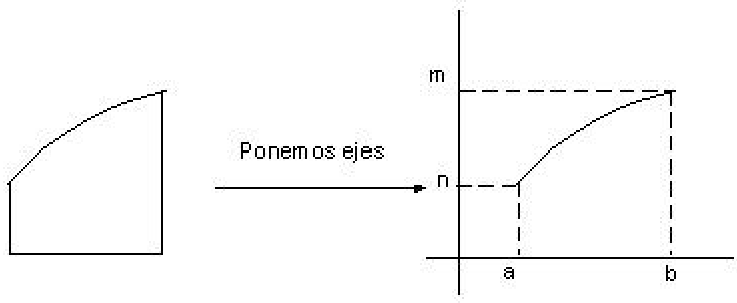
El cálculo integral tiene su origen en el estudio del área de figuras planas; las fórmulas para el cálculo de las áreas de triángulos y rectángulos eran ya conocidas en la Grecia clásica, así como la de los polígonos regulares previa descomposición en triángulos.



El problema se plantea a la hora de calcular áreas de figuras limitadas por líneas curvas. Euclides (300 a.C.) sigue los trabajos de Eudoxio (400 -355 a.C.) para calcular el área del círculo por el método de *exhaución*, es decir, inscribiendo en él sucesivamente polígonos con más lados. La suma de estas áreas se aproximaba cada vez más al área del círculo, estando en el «límite» el valor exacto. Demostró además que, dados dos círculos de áreas A_1 y A_2 y radios r_1 y r_2, se verificaba que $\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$ y que $A = kr^2$, siendo k una constante que Arquímedes llamó π y cuyo valor dijo hallarse entre $\frac{22}{7} > \pi > \frac{223}{71}$. Arquímedes (287-212 a.C.) halló también el área encerrada por un arco de parábola y la cuerda correspondiente, cosa realmente difícil en aquel tiempo, ya que no se disponía del álgebra formalizada ni de la geometría analítica. El método utilizado era el de *agotamiento*, esto es, se encaja el área entre dos polígonos, uno inscrito en la región y otro circunscrito a la región.

Desde los griegos hasta el siglo XVII poco se hizo con relación al cálculo de áreas y volúmenes de figuras limitadas por líneas o superficies cerradas. Pascal, Fermat y Leibniz comienzan un estudio engarzado con el cálculo diferencial; así pues, aunque históricamente se estudian los primeros elementos del cálculo integral antes que el diferencial, en el siglo XVII se estudian y configuran a la par, relacionándose por medio de muchos e importantes resultados. Por esto la mayoría de los autores empiezan exponiendo, en primer lugar, al menos, las primeras nociones de cálculo diferencial, antes de comenzar el estudio del cálculo integral.

Veamos cuál sería la metodología a emplear para el cálculo de áreas de superficies como las siguientes:

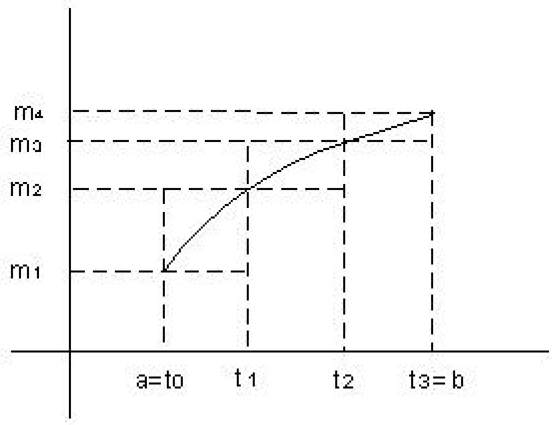


Podemos considerar el lado curvo como la gráfica de una función $y = f(x)$. Si llamamos A al área de la figura, se cumplirá que:

$$(b-a)n < A < (b-a)m$$

Pero esto no nos aporta en muchas ocasiones una idea suficientemente aproximada del valor de A. Supongamos que el intervalo $[a, b]$ lo dividimos en tres partes:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 = b$$



Entonces, el valor del área que buscamos queda acotado entre dos cantidades:

$$s = (t_1 - t_0)m_1 + (t_2 - t_1)m_2 + (t_3 - t_2)m_3 < A$$

$$A < (t_1 - t_0)m_2 + (t_2 - t_1)m_3 + (t_3 - t_2)m_4 = S$$

Si aumentamos el número de puntos en la división de $[a, b]$, cada vez se irán acercando más los valores de s y S, de modo que nos darán una información más precisa sobre A.

Ésta sería la idea intuitiva, puesto que trabajaremos con funciones reales de variable real.

Volver al Índice

1.2. Partición

Llamaremos *partición* P del intervalo $[a, b]$ a un conjunto finito de puntos $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ tal que $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.

Si $y = f(x)$ es una función definida y acotada en $[a, b]$, designaremos por

$$\begin{cases} m_i = \inf\{f(x) \ni t_{i-1} \leq x \leq t_i\} \\ M_i = \sup\{f(x) \ni t_{i-1} \leq x \leq t_i\} \end{cases}$$

Notemos que estos valores existen, pues $f(x)$ es acotada. Además, a través de estos ínfimos y supremos de la función se definen:

$$s(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i\,(t_i - t_{i-1})$$
$$S(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i\,(t_i - t_{i-1})$$

como las sumas inferior y superior, respectivamente, de $f(x)$ correspondientes a la partición P. Estos valores son siempre números reales, y para cada partición P distinta existirán, obviamente, distintas sumas inferiores y superiores.

Nótese que siempre se tiene que $s(f, P) \le S(f,P)$ para la misma partición P, puesto que $m_i \le M_i$ para todo i.

Podríamos tomar particiones más *finas* y así demostrar que cualquier suma inferior está acotada superiormente por cualquier suma superior. Se define a continuación este concepto.

Volver al Índice

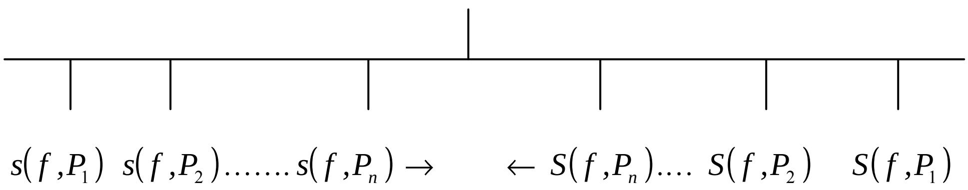
1.3. Definiciones

Se dice que una *partición P* de $[a, b]$ es *más fina* que otra Q si contiene los mismos puntos de ésta y, al menos, uno más. Se denota $Q \subset P$.

Dada $\{P_i\}_{i=1}^{n}$, una familia de particiones del intervalo $[a,\ b]$ tales que $P_i \subseteq P_{i+1}$ para todo i, se tiene que

$$s(f,P_i) \le s(f,P_{i+1})$$
$$S(f,P_i) \ge S(f,P_{i+1})$$

Así se generan dos sucesiones, una $\{s(f,P_i)\}$ creciente y otra $\{S(f,P_i)\}$ decreciente. Además, como $s(f,P) \le S(f,Q)$ para cualesquiera dos particiones de $[a, b]$, obtenemos una representación en la recta real de estas dos sucesiones:



Volver Riemann

Volver al Índice

Intuitivamente, se ve que, si $n \to \infty$ y ambas sucesiones convergen, entonces coinciden los dos límites, cuyo valor será el del área buscada.

1.4. Integral de Riemann

Si $sup\ \{s(f\ , P)\} = inf\ \{S(f\ , P)\}$ para toda partición P de $[a, b]$, diremos que $y = f(x)$ es una función *integrable de Riemann* en $[a, b]$, abreviadamente $f(x) \in R([a, b])$, y a ese valor se le llamará integral (de Riemann) de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, denotándola por:

$$\int_a^b f = sup\ \{s(f, P)\} = inf\ \{S(f, P)\}$$

Obsérvese que la integral de Riemann, caso de existir, de una función toma un valor real.

1.5. Teorema

y = $f(x)$ es una función integrable Riemann $\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ una partición $P \ni S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

Demostración

$\Rightarrow$] Sea $f \in R([a, b])$, y sea $\varepsilon > 0$

$$\int_a^b f = sup\ \{s(f, P)\} \Rightarrow \exists\ P_1 \text{ partición de } [a, b] \ni \int_a^b f - s(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_a^b f = inf\ \{S(f, P)\} \Rightarrow \exists\ P_2 \text{ partición de } [a, b] \ni -\int_a^b f + S(f, P_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sumando ambas desigualdades, miembro a miembro, se llega a:

$$S(f, P_2) - s(f, P_1) < \varepsilon$$

Sea $P = P_1 \cup P_2$, entonces:

$$s(f, P_1) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq S(f, P_2)$$

con lo que tenemos que:

$$S(f,P)-s(f,P)\le S(f,P_2)-s(f,P_1)<\varepsilon \qquad \text{(c.q.d.)}$$

<=] Sabemos que $inf\,\{S(f,P)\}\le S(f,P)$ para cualquier P
$sup\,\{s(f,P)\}\ge s(f,P)$ para cualquier P

Entonces, se tiene

$$0\le\ inf\,\{S(f,P)\}-sup\,\{s(f,P)\}\le\ S(f,P)-s(f,P)\ <\varepsilon\quad \forall\,\varepsilon>0$$

por hipótesis. Lo que nos lleva a que:

$$inf\,\{S(f,P)\}=sup\,\{s(f,P)\}\Rightarrow\ f\in\ R([a,b]) \qquad \text{(c.q.d.)}$$

Volver al Índice

1.6. Algunas propiedades de la integral de Riemann

1) $f\in R([a,\ b])\Leftrightarrow\forall\ c\in(a,\ b),\ f(x)$ es integrable en cada uno de los intervalos $[a,c]$, $[c,b]$. Además se verifica que:

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$$

2) Si $f\in R([a,\ b])$, entonces $kf\in R([a,\ b])$, donde k es una constante cualquiera. Además se verifica que:

$$\int_a^b kf=k\int_a^b f$$

3) Si $f,g\in R([a,b])$, entonces $f+g\in$ R$([a,b])$. Además se verifica que:

$$\int_a^b (f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$$

4) Si $f \in R([a,b])$ y $f(x) \geq 0 \ \forall\ x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

Si $f \in R([a,b])$ y $f(x) \leq 0 \ \forall\ x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f \leq 0$

5) Si $f, g \in R([a,b])$ y $f(x) \leq g(x) \ \forall\ x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

6) Si $f \in R([a, b])$ y se tiene que $|f| \in R([a, b])$ también, siendo $|f|$ la función definida por $|f|(x) = |f(x)| \ \forall\ x \in [a,b]$, entonces se tiene que:

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \qquad \text{(Monotonía de la integral definida)}$$

La conexión entre el cálculo diferencial y el cálculo integral se tiene por medio del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (conocido también como Regla de Barrow).

Volver al Índice

1.7. Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Si una función $y = f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde $F(x)$ es cualquier función tal que $F'(x) = f(x) \ \forall\ x \in [a,b]$.

Volver al Índice

1.8. Teorema del valor medio para integrales

Si $y = f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, entonces existe un valor intermedio $c \in (a,b)$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Volver al Índice

1.9. La función integral

La integral es un número si la calculamos sobre un intervalo $[a, b]$, donde a y b son números reales y fijos. Ahora bien, si dejáramos libertad al extremo b, podríamos estudiar la integral de una función $y = f(x)$ sobre el intervalo $[a, x]$, donde x es variable. Por lo tanto, la integral, al depender de x, sería variable también, dependiendo a su vez de x, es decir, sería una función de x. Es lo que llamaremos *función integral*, denotándola $F(x) = \int_a^x f$.

Volver al Índice

1.10. Función primitiva o antiderivada

El problema de calcular $\int f(x)\,dx$ se reduce a encontrar una función $F(x)$, llamada *primitiva* de $f(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \text{o} \qquad \frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)$$

donde C es una constante arbitraria.

Si $P(x)$ es una primitiva de $f(x)$, se tiene que $P'(x) = f(x)$, o, equivalentemente, utilizando la notación diferencial de Leibniz, $\dfrac{dP(x)}{dx} = f(x)$, es decir, $dP(x) = f(x)\,dx$ (combina la notación diferencial con la integral). Así, $\int f(x)\,dx = P(x) + C$.

A pesar de la semejanza aparente, el símbolo $\int f(x)\,dx$, es conceptualmente distinto del símbolo de integración $\int_a^b f(x)\,dx$. Los dos han sido originados por procesos completamente distintos: la diferenciación y la integración.

Sin embargo, están relacionados por los teoremas fundamentales del cálculo. El Primer Teorema Fundamental dice que se puede construir siempre por integración una primitiva de una función continua (dos primitivas difieren en una constante).

Esto indica que cualquier integral indefinida de $y = f(x)$ es también primitiva de $y = f(x)$. Si $P(x) = \int_{x_o}^{x} f(t)\,dt$ con x_0 cierto límite inferior, $\int f(x)\,dx = P(x) + C$ se puede poner como $\int f(x)\,dx = \int_{x_o}^{x} f(t)\,dt + C$.

El símbolo $\int f(x)\,dx$ se puede cons iderar como representante de una integral indefinida de $y = f(x)$ más una constante.

Volver Segundo Teorema

El Segundo Teorema Fundamental del Cálculo Integral expresa que para cada primitiva $P(x)$ de $y = f(x)$ y para cada constante C se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\mathrm{P}(\mathrm{x}) + C]_a^b$$

Si se sustituye $P(x) + C$ por $\int f(x)\,dx$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b = F(b) - F(a), \text{ con } F'(x) = f(x)$$

Debido a una larga tradición, muchos tratados de cálculo consideran el símbolo $\int f(x)\,dx$ como representante de una integral indefinida y no de una función primitiva o antiderivada.