

CAPÍTULO 2. INTEGRALES: INTRODUCCIÓN Y PROPIEDADES

2.1. Introducción

2.2. Teorema

2.3. Propiedades

2.4. Ejemplos

2.5. Integración de una función compuesta

Capítulo 2

Integrales: Introducción y propiedades

$$\int K \cdot f(x) dx = K \int f(x) dx$$
$$\int 2 \cdot \sin x dx$$
$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Capítulo 2

Integrales: Introducción y propiedades

2.1. Introducción

Una de las cuestiones esenciales que trata el cálculo integral es la siguiente: «Encontrar las funciones $F(x)$ que tienen como derivada una función dada $f(x)$ que se supone continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ ».

Nuestro objetivo es, pues, calcular funciones $F(x)$ conociendo su derivada $f(x)$. Las funciones que buscamos, llamadas *funciones primitivas de la función* $f(x)$, verificarán, por tanto, la igualdad: $F'(x) = f(x)$.

Ejemplo

$F(x) = x^2$ es una primitiva de $f(x) = 2x$, ya que $(x^2)' = 2x$.

Se puede verificar fácilmente por derivación que la función $f(x) = 2x + 5$ admite como funciones primitivas distintas a:

$F_1(x) = x^2 + 5x$; $F_2(x) = x^2 + 5x + 3$; $F_3(x) = x^2 + 5x + C$, siendo $C = \text{constante}$.

Este ejemplo nos muestra que una función dada puede admitir una infinidad de primitivas. Supondremos en lo que sigue que una función continua admite al menos una función primitiva.

2.2. Teorema

Si una función $y = f(x)$ admite una función primitiva, $F(x) \Rightarrow$ admite infinitas funciones primitivas. Se trata de las funciones $G(x) = F(x) + C$, donde $C = \text{constante}$.

Demostración

$$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$$

Notación

Denotaremos a todas las funciones primitivas de $y = f(x)$ por el símbolo $\int f(x) dx$, que se denomina *integral indefinida* de $f(x)$.

Utilizando las notaciones precedentes se obtiene la siguiente equivalencia:

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow f(x) = F'(x)$$

2.3. Propiedades

1) Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ admiten, respectivamente, por primitivas a las funciones $F(x)$ y $G(x)$, la función $f(x) + g(x)$ admite por función primitiva a la función $F(x) + G(x)$.

Sean $F(x) = \int f(x) dx$ y $G(x) = \int g(x) dx$, entonces:

$$[F(x) + G(x)]' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow \int [f(x) + g(x)] dx = F(x) + G(x)$$

Luego:

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

2) Si la función $f(x)$ admite como primitiva a la función $F(x)$ y k es una constante arbitraria, la función $kf(x)$ admite como primitiva a la función $kF(x)$.

$$[kF(x)]' = kF'(x) = kf(x) \Rightarrow \int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

2.4. Ejemplos

$$1) \int 3x dx = 3 \int x dx = 3 \frac{x^2}{2} + 3C = \frac{3}{2} x^2 + C_1$$

$$2) \int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$$

$$3) \int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3} x^{3/2} + C$$

$$4) \int 2\sin x dx = 2 \int \sin x dx = 2(-\cos x) + C = -2\cos x + C$$

$$5) \int 1 dx = \int dx = x + C$$

$$6) \int (x + 2) dx = \int x dx + \int 2 dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C$$

$$7) \int (3x^4 - 5x^2 + x) dx = 3 \frac{x^5}{5} - 5 \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$\begin{aligned} 8) \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{x}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{1/2} dx + \int x^{-1/2} dx = \\ &= \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{3} x^{3/2} + 2x^{1/2} + C \end{aligned}$$

En muchas aplicaciones de la integración se nos da la suficiente información como para determinar una solución particular. Para ello sólo necesitamos conocer el valor de $F(x)$ para un cierto valor de x .

9) Hallar la solución general de la ecuación $F'(x) = \frac{1}{x^2}$ y calcular la solución particular que satisface la condición inicial $F(1) = 2$.

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

$$\text{Ahora como } F(1) = 2 \Rightarrow F(1) = \frac{-1}{1} + C = 2 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow F(x) = \frac{-1}{x} + 3$$

10) Una aplicación relacionada con la gravedad

Se tira hacia arriba una pelota con una velocidad inicial de 64 m/s, desde una altura de 80 m. Hallar la función posición, $s(t)$, para este movimiento. (Recordar que la aceleración debida a la gravedad es -10 m/s^2).

Solución: Suponemos que $t = 0$ representa el tiempo inicial. Por tanto, las dos condiciones iniciales impuestas en el problema pueden ser escritas como:

$$\begin{array}{ll} s(0) = 80 \text{ m} & \text{altura inicial} \\ s'(0) = 64 \text{ m/s} & \text{velocidad inicial} \end{array}$$

Ahora, del valor de la aceleración tenemos que:

$$s''(t) = -10 \text{ m/s}^2 \Rightarrow s'(t) = \int s''(t) dt = \int -10 dt = -10 t + C_1$$

donde

$$C_1 = s'(0) = 64 \Rightarrow s'(t) = -10 t + 64$$

Por tanto,

$$s(t) = \int s'(t) dt = \int (-10t + 64) dt = -10 \frac{t^2}{2} + 64t + C_2$$

donde $C_2 = s(0) = 80$

Finalmente, obtenemos que la función de posición queda determinada por:

$$s(t) = -5t^2 + 64t + 80$$

$$11) \int \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 2 \int x^{-1/2} dx = 2 \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = 4\sqrt{x} + C$$

$$12) \int (x^2 + 1)^2 dx = \int (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + C$$

$$13) \int \frac{x^3 + 3}{x^2} dx = \int \frac{x^3}{x^2} dx + \int \frac{3}{x^2} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{x} + C$$

$$14) \int \sqrt[3]{x}(x-4) dx = \int x^{4/3} dx - \int 4x^{1/3} dx = \frac{x^{7/3}}{7/3} - 4 \frac{x^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{7} x^{7/3} - 3x^{4/3} + C = \frac{3}{7} x^{4/3} (x-7) + C$$

2.5. Integración de una función compuesta

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones que satisfacen las condiciones de derivación de la regla de la cadena para la función compuesta $y = f(g(x))$. Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

Ejemplos

$$1) \int (x^2 + 1)^2 2x dx = \frac{(x^2 + 1)^3}{3} + C$$

$$2) \int 5\cos 5x dx = \sin 5x + C$$

Nota

Muchas funciones a integrar contienen la parte esencial de $g'(x)$ pero les falta alguna constante numérica multiplicando o dividiendo. En estos casos podemos obtener la constante numérica que falta sin más que multiplicar y dividir dicha función por esa constante, para luego aplicar la propiedad de linealidad de la integración, como se muestra en los siguientes ejemplos:

$$\begin{aligned}\int x(x^2 + 1) dx &= \int (x^2 + 1) \frac{1}{2} (2x) dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 1) 2x dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 1)^3}{3} + C = \\ &= \frac{(x^2 + 1)^3}{6} + C \\ \int \cos 5x dx &= \frac{1}{5} \int 5 \cos 5x dx = \frac{\sin 5x}{5} + C\end{aligned}$$

Atención

La operación de multiplicar y dividir no se puede realizar cuando el múltiplo que falta para tener $g'(x)$ contiene a la variable x , debido a que no se puede mover fuera de la integral ninguna parte del integrando que contenga a la variable respecto de la cual estamos integrando.

Para el cálculo de integrales indefinidas de funciones compuestas, hay que tener muy presente la tabla de integrales inmediatas, e intentar llevar la función a integrar a alguna de las formas que allí se ven. Para ello, basta aplicar las propiedades vistas aquí de la integral indefinida y ajustar constantes como se ha comentado anteriormente.

[Volver](#)
[Indefinida](#)