CAPÍTULO 3. PROCEDIMIENTOS DE INTEGRACIÓN

3.1. Integración por cambio de variable

3.2. Integración por partes

3.2.1. Producto de un polinomio por una exponencial

3.2.2. Producto de un polinomio por un seno o un coseno

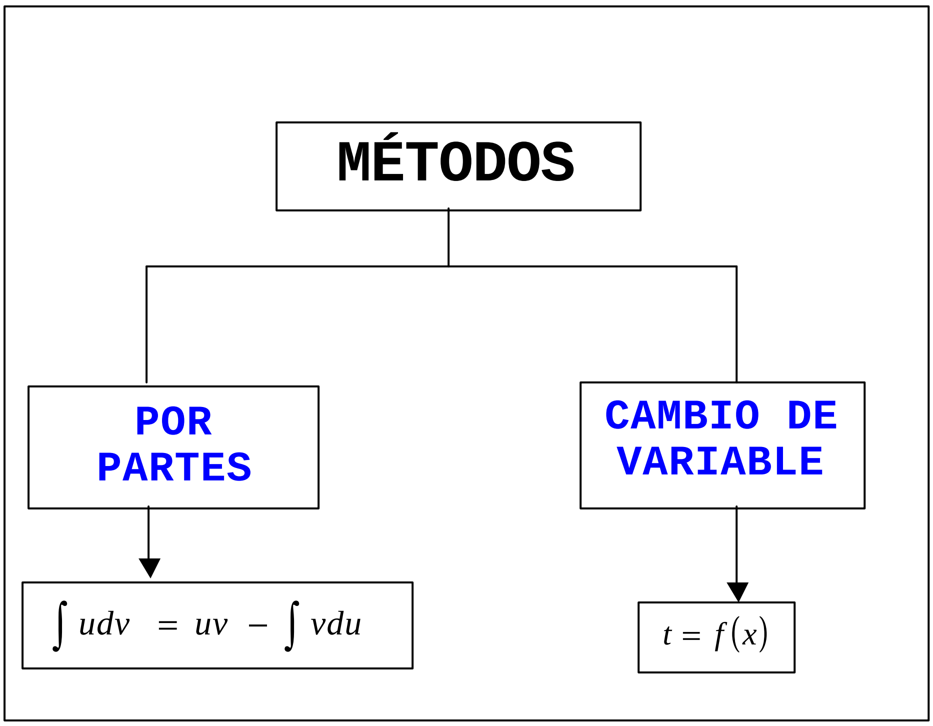
3.2.3. Producto de una exponencial por un seno o un coseno

3.2.4. Producto de un logaritmo por otra función

3.2.5. Las tres funciones inversas arcsen$x$, arccos$x$, arctg$x$

3.2.6. Algunas funciones racionales e irracionales

Capítulo 3
Procedimientos de integración



Capítulo 3
Procedimientos de integración

Volver Métodos

Volver al Índice

3.1. Integración por cambio de variable

Sea $f(x)$ una función y $F(x)$ una de sus primitivas. Si $x = \varphi(u) \Rightarrow F(x) = F(\varphi(u)) = G(u)$, y así, aplicando la regla de la cadena para calcular la derivada, obtenemos que $G\,'(u) = F\,'(\varphi(u))\,\varphi'(u) = f(\varphi(u))\,\varphi'(u)$.

Luego: $\int f(j\,(u))j\,'(u)\,du = G(u) + C = F(\varphi(u)) + C$. El camino a seguir sería: elegir un cambio de variable para realizar; resolver la nueva integral en la nueva variable; por último, deshacer el cambio para dar el resultado en función de la variable original.

$$\int f(x)\,dx = \left\{ \begin{matrix} x = j\,(u) \\ dx = j\,'(u)\,du \end{matrix} \right\} = \int f(j\,(u))j\,'(u)\,du = F(\varphi(u)) + C = F(x) + C$$

Ejemplos

1) $$\int \sqrt{2x-1}\;dx = \left\{ \begin{matrix} 2x-1 = u \\ 2dx = du \end{matrix} \right\} = \int \sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{1/2}du = \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\,u^{3/2} + C = \frac{1}{3}(2x-1)^{3/2} + C$$

2) $$\int x\sqrt{2x-1}\;dx = \left\{ \begin{matrix} 2x-1 = u \\ 2dx = du \end{matrix} \right\} = \int \frac{u+1}{2}\sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{4}\int \left(u^{3/2} + u^{1/2}\right)du =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2}\right] + C = \frac{1}{10}\,u^{5/2} + \frac{1}{6}\,u^{3/2} + C =$$

$$= \frac{1}{10}(2x-1)^{5/2} + \frac{1}{6}(2x-1)^{3/2} + C$$

3) $$\int \operatorname{sen}^2 3x\cos 3x\, dx = \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{sen}3x = u \\ 3\cos 3x\; dx = du \end{array} \right\} = \frac{1}{3}\int u^2 du = \frac{1}{3}\frac{u^3}{3} + C =$$

$$= \frac{1}{9}\, u^3 + C = \frac{1}{9}(\operatorname{sen}3x)^3 + C$$

4) $$\int x^2 \operatorname{sen}x^3 dx = \left\{ \begin{array}{c} x^3 = u \\ 3x^2 dx = du \end{array} \right\} = \int \operatorname{sen}u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}(-\cos u) + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos\left(x^3\right) + C$$

5) $$\int \frac{\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{x} = u \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} dx = du \end{array} \right\} = \int 2\sec^2 u\; du = 2\operatorname{tg}u + C = 2\operatorname{tg}\sqrt{x} + C$$

6) $$\int \sqrt{1-x^2}\; dx = \left\{ \begin{array}{c} x = \operatorname{sen}u \\ dx = \cos u\; du \end{array} \right\} = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}\,\cos u\; du = \int \cos^2 u\; du =$$

$$= \int \frac{1+\cos 2u}{2} du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2u + C =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

$$\left(\; \operatorname{sen}2u = 2\operatorname{sen}u\cos u = 2\,x\sqrt{1-x^2}\;\right)$$

Nota

Se verán más cambios de variable al resolver diferentes tipos de integrales de funciones particulares. Como es obvio, en una misma integral se pueden aplicar diversos cambios de variable de manera sucesiva, hasta que se llegue a una función de la que se conozca de forma inmediata una de sus primitivas. Todos los cambios de variable que se realicen en una misma integral deberán ser deshechos en orden contrario a como se han producido, es decir, primero el último, después el anterior, y así hasta llegar al primero, que se deshará en último lugar.

Volver Métodos

3.2. Integración por partes

Sea $u(x)v(x)$ el producto de dos funciones de x. Aplicando las reglas de diferenciación para el producto de funciones, obtenemos:

Volver al Índice

$$d(uv) = v\,du + u\,dv$$

o, equivalentemente,

$$u\,dv = d(uv) - v\,du$$

Integrando miembro a miembro esta igualdad, llegamos a:

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

pero, como la diferenciación y la integración son funciones inversas, se tiene que: $\int d(uv) = uv$, y, por tanto, la expresión anterior queda:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Esta igualdad entre integrales se conoce como el método de *integración por partes*. Así, si la integral que queremos calcular tiene la forma de un producto $\int u\,dv$, se puede intentar aplicar este método para obtener una parte conocida de la primitiva, uv, y una nueva integral a resolver, $\int v\,du$. Se espera que esta nueva integral sea más fácil de calcular que la primera. Si fuera más difícil, se prueba a intercambiar los papeles de u y dv (dv debe contener siempre a dx) y comenzar el cálculo. Si la nueva integral es aún más difícil, este método no es bueno y no se aplica. A veces este proceso hay que repetirlo más de una vez sobre una misma integral para llegar a conocer la primitiva buscada.

Existen casos en los cuales está comprobado que el método de integración por partes funciona bien, no queriendo decir con esto que sean los únicos casos en los cuales se puede aplicar, ni tampoco que no se pueda aplicar otro método de los que trataremos más adelante. Veamos estos casos a los que nos referimos.

Volver al Índice

3.2.1. Producto de un polinomio por una exponencial

Calcular: $I = \int x e^{2x}\, dx$

Probamos a tomar las partes como: $\left\{ \begin{array}{lcl} e^{2x} = u & \Rightarrow & 2e^{2x} dx = du \\ x\, dx = dv & \Rightarrow & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right\}$

Así, la integral quedará: $I = uv - \int v\, du = e^{2x} \dfrac{x^2}{2} - \int \dfrac{x^2}{2} 2e^{2x} dx$

Esta integral es más complicada que la inicial, ya que hemos aumentado el grado del polinomio. Procedemos a cambiar los papeles de u y de dv, tomando el polinomio como la parte a derivar y la exponencial como la parte a integrar:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x = u & \Rightarrow & dx = du \\ e^{2x} dx = dv & \Rightarrow & v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{array} \right\}$$

Aplicando esta nueva elección en la integral original I:

$$I = \frac{1}{2} x\; e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C = \frac{e^{2x}}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$$

En este caso siempre es más conveniente elegir el polinomio para derivar, es decir, tomarlo como u (pues en la nueva integral quedará un polinomio de un grado menor) y la función exponencial para integrar, es decir, tomarla como dv (en la nueva integral quedará la misma exponencial salvo constantes).

Volver al Índice

3.2.2. Producto de un polinomio por un seno o un coseno

Calcular: $I = \int x \operatorname{sen} 2x\, dx$

Hacemos: $\left\{ \begin{array}{lcl} x = u & \Rightarrow & dx = du \\ \operatorname{sen} 2x\, dx = dv & \Rightarrow & v = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{array} \right\}$

Así, $I = uv - \int v\, du = x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx =$

$= -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$

De nuevo es en general más conveniente derivar el polinomio, es decir, tomarlo como u, e integrar la función trigonométrica, como dv. Además, es bastante frecuente en estos casos tener que aplicar dos o más veces este proceso de integración por partes para resolver la integral original. Veámoslo con un ejemplo:

Calcular: $I = \int (2x^2 - 1)\cos 3x\, dx$

Hacemos partes: $\left\{\begin{array}{lcl} 2x^2 - 1 = u & \Rightarrow & 4x\, dx = du \\ \cos 3x\, dx = dv & \Rightarrow & v = \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3} \end{array}\right\}$

Con lo que I queda:

$$I = (2x^2 - 1)\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x - \int \frac{1}{3} 4x \operatorname{sen} 3x\, dx =$$
$$= \frac{1}{3}(2x^2 - 1)\operatorname{sen} 3x - \frac{4}{3}\int x \operatorname{sen} 3x\, dx$$

En la nueva integral a la que hemos llegado el polinomio no ha desaparecido, pero se ha conseguido rebajar su grado en una unidad. Parece, pues, que una nueva aplicación del proceso de integración por partes a esta nueva integral, con la misma elección de u (el polinomio) y dv (la función trigonométrica), nos conducirá a una integral donde el polinomio haya desaparecido, siendo, por tanto, inmediato calcular una de sus primitivas. Nótese que, si en esta nueva integral intercambiamos los papeles de u (la función trigonométrica) y dv (el polinomio), llegaremos a la integral original, puesto que estaremos deshaciendo lo realizado en la primera aplicación del proceso de integración por partes. Así pues, consideramos la siguiente elección:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x = u & \Rightarrow & dx = du \\ \operatorname{sen}3x\,dx = dv & \Rightarrow & v = -\dfrac{\cos 3x}{3} \end{array}\right\}$$

Así, con la aplicación sucesiva del método de integración por partes a la integral original, ésta quedará de la forma:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\left(2x^2-1\right)\operatorname{sen}3x - \frac{4}{3}\left[-\frac{1}{3}x\cos 3x - \int -\frac{1}{3}\cos 3x\,dx\right] = \\ &= \frac{1}{3}\left(2x^2-1\right)\operatorname{sen}3x + \frac{4}{9}x\ \cos 3x - \frac{4}{9}\int \cos 3x\,dx = \\ &= \frac{1}{3}\left(2x^2-1\right)\operatorname{sen}3x + \frac{4}{9}x\cos 3x - \frac{4}{27}\operatorname{sen}3x + C \end{aligned}$$

Volver al Índice

3.2.3. Producto de una exponencial por un seno o un coseno

Calcular: $I = \int e^{2x}\operatorname{sen}3x\,dx$

Hacemos partes: $\left\{\begin{array}{lcl} e^{2x} = u & \Rightarrow & 2e^{2x}dx = du \\ \operatorname{sen}3x\,dx = dv & \Rightarrow & v = -\dfrac{\cos 3x}{3} \end{array}\right\}$

Con esta elección, la integral I puede expresarse como:

$$I = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\,dx$$

Encontramos así una integral análoga a I. Integramos de nuevo por partes y continuamos llamando u a la exponencial y dv a la función trigonométrica (en caso contrario, volveríamos a la integral original). Así pues, la nueva elección de las partes será:

$$\left\{\begin{array}{lcl} e^{2x} = u & \Rightarrow & 2e^{2x}dx = du \\ \cos 3x\,dx = dv & \Rightarrow & v = \dfrac{\operatorname{sen}3x}{3} \end{array}\right\}$$

Por tanto, I quedará:

$$I = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}e^{2x}\operatorname{sen}3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}\operatorname{sen}3x\,dx\right]$$

$$I = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\operatorname{sen}3x - \frac{4}{9}I$$

$$\frac{13}{9}I = \frac{e^{2x}}{3}\left(\frac{2}{3}\operatorname{sen}3x - \cos 3x\right) + C$$

$$I = \frac{9}{13}\frac{e^{2x}}{3}\left(\frac{2}{3}\operatorname{sen}3x - \cos 3x\right) + C$$

Esta situación, en la cual aparece la integral I que se desea calcular en medio del proceso de integración, afectada de otro coeficiente, surge con frecuencia en el cálculo de integrales, siendo extremadamente ingeniosa su resolución tal como se ha procedido en el ejemplo.

Volver al Índice

3.2.4. Producto de un logaritmo por otra función

Calcular: $I = \int \frac{\operatorname{Log}x}{x}dx$

En estos casos, la elección de las partes es bastante clara. Como el Logaritmo no posee una primitiva inmediata, lo más razonable es elegir la otra función como dv, y el propio Logaritmo como u, ya que su derivada si que es fácil de encontrar. Solo en los casos en que la otra función tenga una integración mucho más complicada que la de la función Logaritmo, se elegirán las partes de forma contraria. Esta situación es general, es decir, la elección de las partes tiene mucho que ver con que función sea más sencilla para calcular una de sus primitivas, puesto que el proceso de derivación ofrece menos dificultades.

En el ejemplo tomamos las partes como: $\left\{\begin{array}{lcl} \operatorname{Log}x = u & \Rightarrow & \frac{1}{x}dx = du \\ \frac{dx}{x} = dv & \Rightarrow & v = \operatorname{Log}x \end{array}\right\}$

$$I = \text{Log}x\ \text{Log}x - \int \text{Log}x \frac{dx}{x} = (\text{Log}x)^2 - I$$

$$2I = (\text{Log}x)^2 + C \Rightarrow I = \frac{1}{2}(\text{Log}x)^2 + C$$

Volver al Índice

3.2.5. Las tres funciones inversas arcsen$x$, arccos$x$, arctg$x$

Calcular: $I = \int \text{arcsen}x\, dx$

Por razones similares a las argumentadas para el caso anterior, la elección a priori más sencilla será tomar las partes como:

$$\left\{ \begin{array}{lcr} \text{arcsen}x = u & \Rightarrow & \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du \\ dx = dv & \Rightarrow & x = v \end{array} \right\}$$

$$I = x\ \text{arcsen}x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\ \text{arcsen}x + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= x\ \text{arcsen}x + \frac{1}{2} 2\sqrt{1-x^2} + C$$

Volver al Índice

3.2.6. Algunas funciones racionales e irracionales

a) Calcular: $I = \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$

Hacemos partes: $\left\{ \begin{array}{lcr} x = u & \Rightarrow & dx = du \\ \dfrac{x\, dx}{(1+x^2)^2} = dv & \Rightarrow & -\dfrac{1}{2(1+x^2)} = v \end{array} \right\}$

$$I = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\text{arctg}x + C$$

b) Calcular: $I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$

Tomamos partes: $\left\{ \begin{array}{lcr} \sqrt{x^2 - a^2} = u & \Rightarrow & \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = du \\ dx = dv & \Rightarrow & x = v \end{array} \right\}$

$$I = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} =$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx - a^2 \int \frac{dx/a}{\sqrt{(x/a)^2 - 1}} =$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - I - a^2 \operatorname{Log} \left| \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right| + C$$

$$I = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \operatorname{Log} \left| \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right| + C$$