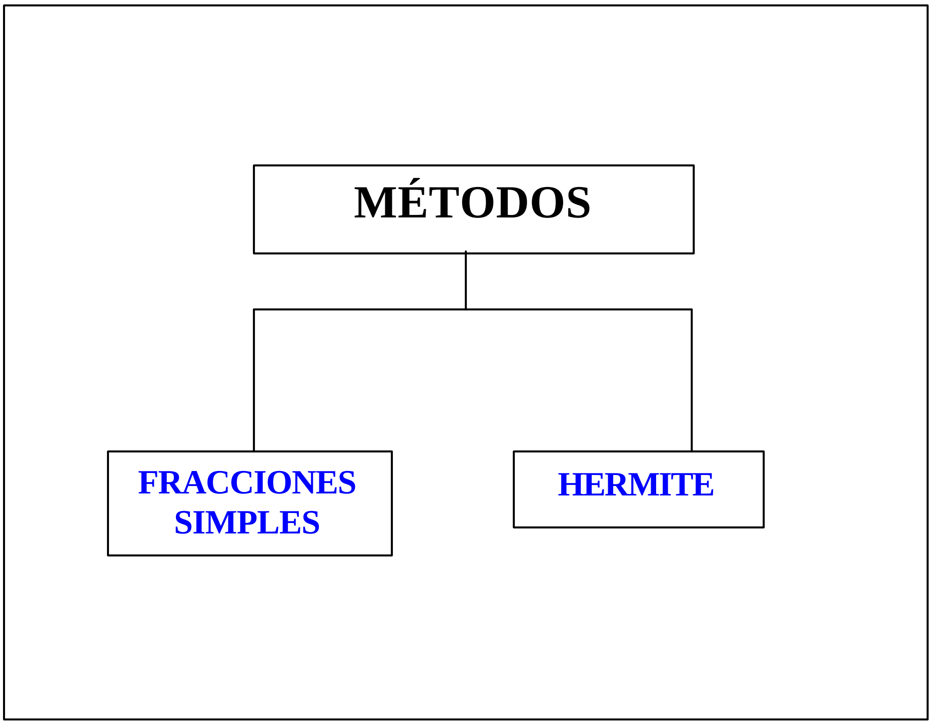
# CAPÍTULO 4. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

# Capítulo 4
# Integración de funciones racionales



Volver al Índice

# Capítulo 4
# Integración de funciones racionales

## 4.1. Introducción

Una función racional es el cociente de dos polinomios $f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$.
Supondremos que los dos polinomios $A(x)$ y $B(x)$ no tienen ningún cero en común, es decir, que no existe ningún número, real o complejo, $x_0$, tal que los anule a la vez $A(x_0) = B(x_0) =$ 0. En este caso se dice que la función es *irreducible*. Para calcular $\int f(x)\,dx$ seguiremos los siguientes pasos.

## 4.2. Raíces comunes

En este caso, se tiene una factorización de los dos polinomios de la forma: $A(x) = (x - x_0)A_1(x)$, $B(x) = (x - x_0)B_1(x)$, y así análogamente con todas y cada una de las raíces comunes a los dos. En estas condiciones, para $x \neq x_0$, la función racional $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ se reduce a la función simplificada $\dfrac{A_1(x)}{B_1(x)}$, ahora ya sin raíces comunes (irreducible). Así pues, estudiaremos las integrales del tipo $\int \dfrac{A(x)}{B(x)}\,dx$, donde $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ es una función irreducible.

## 4.3. División entera de polinomios

Se realizará en el caso de que el grado del numerador $A(x)$ sea superior o igual al grado del denominador $B(x)$. En tal caso, existen polinomios únicos $Q(x)$ y $R(x)$ tales que:

$$A(x) = B(x)\,Q(x) + R(x)\,, \quad \text{con} \quad grado\ R(x) < grado\ B(x)$$

Así, se puede expresar la función racional $f(x)$ como:

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

Al polinomio $Q(x)$ se le llama *parte entera de la función racional* y su integración es sencilla. Así, la integral de $f(x)$ queda de la forma:

$$\int f(x)\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{B(x)}\,dx$$

Así, tendríamos que integrar una función racional irreducible en la que el grado del numerador es estrictamente inferior al del denominador. Para encontrar estos polinomios $Q(x)$, $R(x)$ es suficiente con realizar la división entera de polinomios en la forma tradicional. Por tanto, a partir de ahora consideraremos funciones racionales irreducibles en las que el grado del numerador sea estrictamente menor que el grado del denominador.

Volver al Índice

## 4.4. Descomposición de un polinomio en producto de factores

El objetivo ahora será encontrar una descomposición de la función racional de la forma anterior a integrar, en suma de otras funciones racionales que sean más simples y fáciles de integrar. Para deducir dicha descomposición, el primer paso necesario requiere factorizar el denominador, o sea, calcular las raíces del mismo. Es decir, basta encontrar las raíces de $B(x)$, resolviendo para ello la ecuación polinómica $B(x) = 0$. Estas raíces serán, en general, números complejos, y dependiendo de la naturaleza y multiplicidad de las mismas se elegirá una descomposición u otra de la función racional. Para localizar las raíces de $B(x) = 0$ se utilizarán los métodos conocidos (fórmula para polinomios de segundo grado, Ruffini para grado superior, o cualquier otro método válido para su resolución).

Según sean estas raíces, como ha quedado dicho anteriormente, utilizaremos dos métodos para resolver este tipo de integrales: descomposición en fracciones simples o método de Hermite.

Antes de integrar una función racional irreducible, se intenta descomponerla en una suma de funciones fáciles de integrar. Para ello previamente hemos calculado todas las raíces de $B(x)$ (reales y complejas). Sean éstas $a_1, a_2, \ldots, a_r$ reales con orden de multiplicidad $m_1, m_2, \ldots, m_r$, respectivamente. Si tenemos una raíz compleja, también debe aparecer necesariamente su conjugada; así pues, sean $\alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots, \alpha_s \pm i\beta_s$ las parejas de raíces complejas conjugadas con orden de multiplicidad $n_1, \ldots, n_s$, respectivamente. Así, $B(x)$ puede descomponerse (se demuestra en álgebra) en producto de factores como:

$$B(x) = \lambda\left[(x-a_1)^{m_1} \ldots (x-a_r)^{m_r}\left((x-\alpha_1)^2+\beta_1^2\right)^{n_1} \ldots \left((x-\alpha_s)^2+\beta_s^2\right)^{n_s}\right]$$

(obsérvese que $\left[x-(\alpha_k+i\beta_k)\right]\left[x-(\alpha_k-i\beta_k)\right] = (x-\alpha_k)^2+\beta_k^2$), donde $\lambda$ es el coeficiente del término de mayor grado de $B(x)$ (coeficiente director de $B(x)$). De esta manera, de la descomposición en factores de $B(x)$ se obtiene la descomposición en fracciones simples de $\dfrac{R(x)}{B(x)}$:

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} + \ldots + \frac{B_1}{x-a_r} + \ldots + \right.$$

$$+ \frac{B_{m_r}}{(x-a_r)^{m_r}} + \ldots + \frac{M_1x+N_1}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \ldots + \frac{M_{n_1}x+N_{n_1}}{\left[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2\right]^{n_1}} + \ldots +$$

$$\left. + \frac{P_1x+T_1}{(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2} + \ldots + \frac{P_{n_s}x+T_{n_s}}{\left[(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2\right]^{n_s}}\right]$$

donde $A_k, B_k, M_k, N_k, P_k, T_k$ son constantes reales a determinar.

## 4.5. Método de fracciones simples

Volver Métodos

Este método se aplicará cuando las únicas raíces con multiplicidad mayor estricta a uno de $B(x)$ sean reales. La descomposición en suma de funciones racionales sencillas a integrar de la función racional irreducible original se realizará según el siguiente criterio:

Volver al Índice

– Por cada raíz real simple $x = a$ aparecerá un sumando de la forma:

$$\frac{A}{x-a}$$

– Por cada raíz real $x = b$ con multiplicidad $m$ mayor estricta a uno aparecerán $m$ sumandos de la forma:

$$\frac{B_1}{x-b}+....+\frac{B_{m-1}}{(x-b)^{m-1}}+\frac{B_m}{(x-b)^m}$$

– Cada raíz compleja $\alpha + i\beta$ simple se une a su conjugada $\alpha - i\beta$, adoptando la forma $(x-\alpha)^2+\beta^2$. Por cada una de estas parejas aparecerá un sumando en la descomposición de la forma:

$$\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

Seguidamente se procede al cálculo de todas las constantes reales indeterminadas que aparecen en los numerados de todos los sumandos en la descomposición, $A$,$B$,...

Así pues, la pregunta ahora sería: ¿cómo determinar las constantes de los numeradores de cada una de las fracciones simples? El primer paso para responder a esta pregunta consiste en realizar operaciones con todos los sumandos, con el objeto de reducirlos a común denominador, que en general coincidirá con $B(x)$, para pasar a considerar una igualdad entre los numeradores polinómicos $R(x)$ y el resultante en el miembro de la derecha de la descomposición, fruto de la operación de colocar el denominador común. Una vez obtenida esta igualdad entre polinomios, se puede optar por al menos dos caminos:

- el primero, más general, consiste en identificar los coeficientes de los términos de igual grado en ambos miembros de la igualdad;
- el segundo se realizará dando valores sencillos a la variable $x$ para ambos miembros de la igualdad (en especial, valores que correspondan a las raíces reales de $B(x)$).

En definitiva, el método de obtención de las constantes puede variar, pero todo se reduce a una igualdad entre polinomios. Por ello, cabe decir que esta descomposición es única, puesto que dos polinomios son iguales si y sólo si todos sus coeficientes coinciden. En ambos casos, se llegará a un sistema lineal cuadrado, cuyas incógnitas serán las constantes a determinar, con solución única garantizada.

Una vez efectuada esta descomposición y conocidas todas las constantes que aparecen en ella, las integrales que deberemos resolver adoptarán alguna de las siguientes expresiones:

1) $\int \frac{A}{x-a} dx = A \text{ Log}|\, x - a \,| + C$

2) $\int \frac{B}{(x-b)^p} dx = B\frac{(x-b)^{-p+1}}{-p+1} + C = \frac{B}{-p+1}\frac{1}{(x-b)^{p-1}} + C$

(si $p$ es natural y $p \geq 2$)

3) $\int \frac{Mx+N}{(x-r)^2+s^2} dx = \int \frac{Mx+N-Mr+Mr}{(x-r)^2+s^2} dx = M\int \frac{x-r}{(x-r)^2+s^2} dx +$

$$+\int \frac{N+Mr}{(x-r)^2+s^2} dx = \frac{M}{2}\text{ Log}\left[(x-r)^2+s^2\right] + \int \frac{Mr+N}{s^2\left[\left(\frac{x-r}{s}\right)^2+1\right]} dx =$$

$$=\frac{M}{2}\text{ Log}\left[(x-r)^2+s^2\right] + \frac{N+Mr}{s}\int \frac{\frac{dx}{s}}{\left(\frac{x-r}{s}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{M}{2}\text{ Log}\left[(x-r)^2+s^2\right] + \frac{N+Mr}{s}\text{ arctg}\left(\frac{x-r}{s}\right) + C$$

*Ejemplos*

1) Calcular: $I = \int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{dx}{(x+2)(x-2)}$

Como la función racional a integrar es irreducible y el grado del numerador, 0, es estrictamente menor que el del denominador, 2, procedemos a calcular las raíces de éste último. Obviamente, éstas son

$x = 2$, $x = -2$. Como ambas son reales, el método de descomposición a utilizar será el de fracciones simples. Por tanto, descomponemos la función racional de la siguiente manera:

$$\frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+2)}{(x+2)(x-2)}$$

Igualando los numeradores de ambos miembros, una vez puesto el denominador común, llegamos a que:

$$1 = A(x-2) + B(x+2)$$

Para calcular $A$ y $B$, usamos el segundo procedimiento comentado, es decir, damos a $x$ los valores de las raíces reales del denominador de la función racional original. Así pues,

$$\text{si } x = 2 \;\Rightarrow\; B = \frac{1}{4}, \quad \text{y} \quad \text{si } x = -2 \;\Rightarrow\; A = -\frac{1}{4}$$

Por tanto, la integral original quedará, aplicando las propiedades de la integración:

$$I = \int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{-1/4}{x+2}dx + \int \frac{1/4}{x-2}dx = -\frac{1}{4}\operatorname{Log}|x+2| + \frac{1}{4}\operatorname{Log}|x-2| + C$$

2) Calcular: $I = \displaystyle\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx = \int \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2}dx$

De nuevo, la función racional a integrar es irreducible y el grado del numerador, 1, es estrictamente menor que el del denominador, 3. Las raíces de éste son $x = -1$, real y simple, $x = 1$, real y doble. Como no posee raíces complejas, usaremos la descomposición dada por el método de fracciones simples:

$$\frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

Igualando los numeradores, tenemos que:

$$3x + 5 = A\,x^2 - 2Ax + A + B\,x^2 - B + Cx + C$$

Usaremos ahora el primer procedimiento sugerido para calcular las constantes indeterminadas, es decir, igualaremos los coeficientes del mismo grado a ambos lados de la igualdad:

grado 2: $0 = A + B$
grado 1: $3 = -2A + C$
grado 0: $5 = A - B + C$

Este sistema contiene tres ecuaciones y tres incógnitas. Su resolución es sencilla, obteniéndose el siguiente resultado:

$$A = \frac{1}{2} \ , \ B = -\frac{1}{2} \ , \ C = 4$$

Por tanto, la integral original quedará como:

$$I = \int \frac{1/2}{x+1}dx + \int \frac{-1/2}{x-1}dx + \int \frac{4}{(x-1)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\text{Log}|x+1| - \frac{1}{2}\text{Log}|x-1| - \frac{4}{x-1} + C$$

3) Calcular: $I = \displaystyle\int \frac{6x^2 - 38x + 76}{(x+1)(x-5)(x-3)}dx$

La función racional es irreducible (se puede comprobar fácilmente que ni $x = -1$, ni $x = 5$, ni $x = 3$, raíces del denominador, lo son del polinomio que aparece en el numerador), y además el grado del numerador, 2, es estrictamente menor que el del denominador, 3. Por tanto, la descomposición a través del método de fracciones simples queda:

$$\frac{6x^2-38x+76}{(x+1)(x-5)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-5}+\frac{C}{x-3}=$$

$$=\frac{A(x-5)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-5)}{(x+1)(x-5)(x-3)}$$

Como las raíces del denominador son reales simples, daremos justamente esos valores a la variable $x$ en la igualdad de numeradores en la descomposición:

$x = -1 \;\Rightarrow\; 120 = 24A \;\Rightarrow\; A=5$
$x = 3 \;\Rightarrow\; 54 - 114 + 76 = -8C \;\Rightarrow\; 16 = -8C \;\Rightarrow\; C=-2$
$x = 5 \;\Rightarrow\; 150 - 190 + 76 = 12B \;\Rightarrow\; 36 = 12B \;\Rightarrow\; B=3$

Así, la integral $I$ se calcula como:

$$I = 5\int\frac{dx}{x+1}+3\int\frac{dx}{x-5}-2\int\frac{dx}{x-3} = \text{Log}\,\frac{|x+1|^5\,|x-5|^3}{|x-3|^2}+C$$

4) Calcular: $I = \displaystyle\int\frac{2x^3-7x^2+9x-5}{x^4-x^3}dx$

Las raíces del denominador son $x = 0$, de multiplicidad igual a tres, y $x = 1$, simple. Como estos valores no anulan al numerador, la función racional es irreducible. Además, el grado del numerador, 3, es estrictamente menor que el del denominador, 4. Esto nos lleva a realizar la descomposición por medio del método de fracciones simples:

$$\frac{2x^3-7x^2+9x-5}{x^4-x^3}=\frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x-1}=$$

$$=\frac{A(x-1)+Bx(x-1)+Cx^2(x-1)+Dx^3}{x^3(x-1)}$$

Aplicando la segunda opción dada para calcular los coeficientes constantes, daremos a $x$ los valores de sus dos raíces reales distintas y otros dos valores arbitrarios hasta conseguir un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{array}{llll}
x=0 & \Rightarrow & -5=-A & \Rightarrow \quad A=5 \\
x=1 & \Rightarrow & -1=D & \\
x=-1 & \Rightarrow & -23=-2A+2B-2C-D & \\
 & \Rightarrow & -23=-10+2B-2C+1 & \Rightarrow \quad -14=2B-2C \\
x=2 & \Rightarrow & 1=A+2B+4C+8D & \Rightarrow \quad 1=5+2B+4C-8 \\
 & \Rightarrow & 4=2B+4C &
\end{array}$$

De las dos últimas ecuaciones resulta que: $C=3 \Rightarrow B=-4$.
Así, $I$ quedará:

$$I=5\int\frac{dx}{x^3}-4\int\frac{dx}{x^2}+3\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}=-\frac{5}{2x^2}+\frac{4}{x}+3\mathrm{Log}|x|-\mathrm{Log}|x-1|+C$$

5) Calcular: $I=\int\frac{x-4}{x^3-x^2-x-2}dx=\int\frac{x-4}{(x-2)(x^2+x+1)}dx$

El denominador posee una raíz real, $x=2$, simple, y una pareja de raíces complejas conjugadas, que son los ceros del polinomio $x^2+x+1$. Estas raíces no lo son del numerador, por lo que la función racional es irreducible. De nuevo, el grado del numerador, 1, es estrictamente menor que el del denominador, 3. Aunque en este caso aparecen raíces complejas, éstas son simples, por lo que de nuevo debemos emplear el método de descomposición de fracciones simples:

$$\frac{x-4}{(x-2)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+x+1)}$$

En este caso, optamos por la primera opción para el cálculo de las constantes indeterminadas, igualando los coeficientes de los términos del mismo grado en ambos miembros:

$$x - 4 = A\,x^2 + A\,x + A + B\,x^2 - 2Bx + C\,x - 2C$$

$$\begin{array}{lll} x^2: & 0 = A+B \quad \Rightarrow & B = -A \\ x\ : & 1 = A - 2B + C \Rightarrow & A = \dfrac{-2}{3}, \quad \mathrm{B} = \dfrac{2}{7}\ ,\ \mathrm{C} = \dfrac{13}{7} \\ 1\ : & -4 = A - 2C & \end{array}$$

Por tanto, la integral $I$ quedará:

$$I = \frac{-2}{7}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{7}\int \frac{2x+13}{x^2+x+1}\,dx = \frac{-2}{7}\,\mathrm{Log}\,|\,x-2\,| + \frac{1}{7}\int \frac{2x+13}{x^2+x+1}\,dx$$

Esta nueva integral la separaremos en dos, con el objetivo de llegar en una de ellas a obtener un Logaritmo, y en la otra un arco tangente.

$$I_1 = \int \frac{2x+13}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + 12\int \frac{dx}{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}} =$$

$$= \mathrm{Log}\,|\,x^2 + x + 1\,| + 12\,\frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} =$$

$$= \mathrm{Log}\,|\,x^2 + x + 1\,| + 16\,\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{2/\sqrt{3}\ dx}{\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} =$$

$$= \mathrm{Log}|\,x^2 + x + 1| + 8\sqrt{3}\ \mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Llevando este resultado a la integral original, tenemos que:

$$I = \frac{-2}{7}\,\mathrm{Log}\,|\,x-2\,| + \frac{1}{7}\,\mathrm{Log}|\,x^2+x+1\,| + \frac{8}{7}\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \mathrm{C}$$

Volver Métodos

Volver al Índice

## 4.6. Método de Hermite

Este método se aplicará para calcular integrales del tipo $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, cuando *grado* $P(x)$ < *grado* $Q(x)$, y $Q(x)$ tiene raíces complejas con multiplicidad mayor estricta a uno. Dicho método se basa en que $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se puede descomponer como sigue:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{d}{dx}\left[\frac{R(x)}{D(x)}\right] + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{Mx+N}{(x-r)^2+s^2}$$

Donde, si $Q(x) = (x-a)^m \ldots (x-b)^n \ldots \left[(x-r)^2+s^2\right]^p$, entonces,

$$D(x) = (x-a)^{m-1} \ldots (x-b)^{n-1} \ldots \left[(x-r)^2+s^2\right]^{p-1}$$

es decir, $D(x)=m.c.d.[Q(x),Q'(x)]$, o, lo que es lo mismo, el polinomio que resulta de dividir $Q(x)$ por $(x-a)\ldots(x-b)\ldots\left[(x-r)^2+s^2\right]$.

En resumen, $D(x)$ es el polinomio $Q(x)$ ya descompuesto en factores y con cada uno de ellos rebajado en uno su orden de multiplicidad.

Por otra parte, $R(x)$ es un polinomio de coeficientes a determinar y de grado inferior en una unidad al de $D(x)$.

Así, si llamamos $C(x)$ al polinomio $(x-a)\ldots(x-b)\ldots\left[(x-r)^2+s^2\right]$, es decir, $C(x) = \dfrac{Q(x)}{D(x)}$, podemos escribir:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{d}{dx}\left[\frac{R(x)}{D(x)}\right] + \frac{B(x)}{C(x)}$$

Integrando miembro a miembro esta igualdad,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \frac{R(x)}{D(x)} + \int \frac{B(x)}{C(x)}\, dx$$

donde *grado* $B(x)$ = [*grado* $C(x)$] $-1$

Nótese que este método de Hermite ya nos proporciona una parte del resultado buscado, y que la integral que nos queda por calcular es una función racional con numerador $B(x)$ y denominador $C(x)$, que se puede descomponer por medio del método anterior de fracciones simples, ya que las raíces complejas de $C(x)$, en caso de existir, deben ser simples. Por tanto, podemos escribir:

$$\frac{B(x)}{C(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{Mx+N}{(x-r)^2+s^2}$$

Aunque el método de Hermite es largo, no sólo porque debemos obtener los coeficientes indeterminados sino porque hay que realizar $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{R(x)}{D(x)}\right]$, que, aunque sencilla es muy engorrosa de calcular, el método es aplicable a cualquier función racional, ya que es una generalización del método de fracciones simples teniendo en cuenta que añadimos el término $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{R(x)}{D(x)}\right]$.

*Nota*

Omitimos la demostración de este método por ser muy compleja.

*Ejemplos*

1) Calcular: $I = \int \frac{dx}{(x+1)^2 (x^2+1)^2}$

En este caso, el denominador posee raíces complejas dobles, por lo que, como el grado del numerador, 0, es estrictamente menor que el denominador, 6, debemos aplicar la descomposición dada por el método de Hermite:

$$\frac{1}{(x+1)^2 (x^2+1)^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{ax^2+bx+c}{(x+1)(x^2+1)}\right] + \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Una vez realizada la derivada del cociente y puesto denominador común (como en el caso de fracciones simples), usaremos el procedimiento de igualar los coeficientes de los términos del mismo grado en ambos lados de la igualdad, para obtener el sistema que nos determine el valor de las constantes indeterminadas:

$$\begin{array}{ll}
x^5: & 0 = A + B \\
x^4: & 0 = -a + A + 2B + C \\
x^3: & 0 = -2b + 2A + 2B + 2C \\
x^2: & 0 = -3c - b + a + 2A + 2B + 2C \\
x: & 0 = 2a - 2c + A + B + 2C \\
1: & 1 = b - c + A + C
\end{array}$$

Resolviendo este sistema, llegamos a que:

$$a = \frac{-1}{4},\ b = \frac{1}{5},\ c = 0,\ A = \frac{1}{2},\ B = \frac{-1}{2},\ C = \frac{1}{4}$$

Por tanto, la integral original tendrá la forma:

$$I = \frac{-x^2+x}{4(x+1)(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4}\int \frac{-2x+1}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{-x^2+x}{4(x+1)(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{Log}|x+1| - \frac{1}{4}\operatorname{Log}|x^2+1| + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x + C$$

2) Calcular: $I = \int \frac{dx}{x^3(x-1)(x^2+1)^2}$

De nuevo, el denominador posee una pareja de raíces complejas conjugadas de multiplicidad dos, y el grado del numerador, 0, es estrictamente menor que el del denominador, 8, por lo que, aplicando el método de Hermite, obtenemos:

$$\frac{1}{x^3(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2(x^2+1)}\right] + \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \\ + \frac{Mx+N}{x^2+1}$$

Nótese que la raíz real $x = 1$ no aparece en el denominador del cociente a derivar, debido a que su multiplicidad es uno, y al rebajarla en un grado se convierte en cero. Realizada la derivación y la puesta de denominador común, una vez más igualamos los coeficientes de los términos del mismo grado, obteniendo el siguiente sistema lineal:

$$\begin{array}{ll}
x^7: & 0 = A + B + M = 0 \\
x^6: & 0 = -a - A - M + N \\
x^5: & 0 = a - 2b + 2A + 2B + M - N \\
x^4: & 0 = 2b + a - 3c - 2A - M + N \\
x^3: & 0 = 3c - a - 4d + A + B - N \\
x^2: & 0 = 4d - c - A \\
x: & 0 = c - 2d \\
1: & 1 = 2d
\end{array}$$

La solución única de este sistema es:

$$a=\frac{5}{4},\ b=\frac{3}{4},\ c=1,\ d=\frac{1}{2},\ A=1,\ B=\frac{1}{4},\ M=\frac{-5}{4},\ N=1$$

Por tanto, $I$ queda:

$$I=\frac{5x^3+3x^2+4x+2}{4x^2\left(x^2+1\right)}+\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{5}{8}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{5x^3+3x^2+4x+2}{4x^2\left(x^2+1\right)}+\mathrm{Log}|x|+\frac{1}{4}\mathrm{Log}|x-1|-\frac{5}{8}\mathrm{Log}|x^2+1|+\mathrm{arctg}x+C$$

3) Calcular: $I=\displaystyle\int\frac{7x^4-10x^3-11x^2-24x+8}{(x-5)\left(x^2+2x+2\right)^2}dx$

El denominador factorizado nos muestra la existencia de raíces complejas conjugadas dobles. Como, además, la función racional es irreducible y el grado del numerador, 4, es estrictamente menor que el del denominador, 5, procedemos a aplicar el método de descomposición de Hermite:

$$\frac{7x^4-10x^3-11x^2-24x+8}{(x-5)\left(x^2+2x+2\right)^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{ax+b}{x^2+2x+2}\right]+\frac{A}{x-5}+$$
$$+\frac{Mx+N}{x^2+2x+2}$$

Procediendo como en los ejemplos anteriores, se llega al siguiente sistema lineal que determina las constantes:

| | |
|---|---|
| $x^4$: | $7=A+M$ |
| $x^3$: | $-10=-a+4A-3M+N$ |
| $x^2$: | $-11=5a-2b+8A-8M-3N$ |
| $x$: | $-24=8b+2a+8A-10M-8N$ |
| 1: | $8=-10a+10b+4A-10N$ |

cuya solución es:

$$a = 1,\, b = -1,\, A = 2,\, M = 5,\, N = -2$$

Así, resulta que:

$$I = \frac{x-1}{x^2+2x+2} + 2\int \frac{dx}{x-5} + \int \frac{5x-2}{x^2+2x+2}\,dx =$$

$$= \frac{x-1}{x^2+2x+2} + 2\mathrm{Log}|x-5| + \frac{5}{2}\mathrm{Log}|x^2+2x+2| - 7\,\mathrm{arctg}(x+1) + C$$

donde la última integral es de uno de los tipos que hemos visto en el caso de aplicación del método de fracciones simples, cuando las raíces del denominador eran complejas conjugadas simples.

Volver al Índice

## 4.7. Problemas resueltos

1) $I = \int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{\left(x^2+2\right)^3}\,dx$

Debido a la existencia de raíces complejas conjugadas en el denominador, se asegura que el método de descomposición de Hermite va a permitir resolver esta integral. En este caso, vamos a aplicar una generalización del método de fracciones simples, que aquí va a funcionar, aunque, en general, acabaríamos por recurrir al método de Hermite necesariamente.
Vamos, por tanto, a aplicar la descomposición de fracciones simples, tratando a las raíces complejas conjugadas con multiplicidad mayor estricta a uno como lo hacemos con las que son reales. En este ejemplo aparecerán tres sumandos debidos a la única pareja de raíces complejas conjugadas triples:

$$\frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{\left(x^2+2\right)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+2\right)^2} + \frac{Ex+F}{\left(x^2+2\right)^3}$$

Si ponemos denominador común e igualamos los coeficientes de los términos del mismo grado, llegamos al sistema lineal:

$$\begin{array}{ll} x^5: & 1 = A \\ x^4: & -1 = B \\ x^3: & 4 = 4A + C \\ x^2: & -4 = 4B + D \\ x: & 8 = 4A + 2C + E \\ 1: & -4 = 4B + 2D + F \end{array}$$

Su solución es:

$$A = 1 \,,\, B = -1 \,,\, C = 0 \,,\, D = 0 \,,\, E = 4 \,,\, F = 0$$

Por tanto, la integral quedará:

$$I = \int \frac{x-1}{x^2+2}\,dx + \int \frac{4x}{\left(x^2+2\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{Log}|\,x^2 + 2| - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\left(x^2+2\right)^2} + \text{C}$$

2) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$

Aquí sí que aplicamos el método de Hermite, debido a la existencia de raíces complejas conjugadas dobles.

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{ax+b}{x^2+1}\right] + \frac{Mx+N}{x^2+1}$$

El sistema lineal al que llegamos es:

$$\begin{array}{ll} x^3: & 0 = M \\ x^2: & 0 = -\,a + N \\ x: & 0 = -\,2b + M \\ 1: & 1 = a + N \end{array}$$

cuya solución es:

$$a = \frac{1}{2}, b = 0, M = 0, N = \frac{1}{2}$$

que, llevada a la integral, resulta en:

$$I = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$$

3) Proponemos un último ejemplo: $I = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

Como en casos anteriores, al aplicar Hermite resulta:

$$\frac{1}{(x^2+1)^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x^2+1)^2}\right] + \frac{Mx+N}{x^2+1}$$

El sistema queda:

$$\begin{array}{ll}
x^5: & 0 = M \\
x^4: & 0 = -a + N \\
x^3: & 0 = -2b + 2M \\
x^2: & 0 = -3c + 3a + 2N \\
x: & 0 = 2b - 4d + M \\
1: & 1 = c + N
\end{array}$$

Su solución es:

$$a = \frac{3}{8}, b = 0, c = \frac{5}{8}, d = 0, M = 0, N = \frac{3}{8}$$

La integral se resuelve finalmente como:

$$I = \frac{3x^3 + 5x}{8\left(x^2 + 1\right)^2} + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{3x^3 + 5x}{8\left(x^2 + 1\right)^2} + \frac{3}{8}\,\mathrm{arctg}x + C$$