CAPÍTULO 5. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Capítulo 5
Integración de funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\int$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dx$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Capítulo 5
Integración de funciones trigonométricas

Volver al Índice

5.1. Introducción

En este capítulo trataremos el problema de la integración de funciones racionales que contengan solamente funciones trigonométricas. El caso más general en que dichas funciones son irracionales se verá en el próximo capítulo. A pesar de ello, algunos cambios de variables estudiados aquí pueden ser válidos también cuando aparezcan funciones irracionales.

Para la resolución de integrales de funciones racionales que contengan a funciones trigonométricas, es necesario conocer algunas de las distintas relaciones más habituales que existen entre las funciones trigonométricas, de las que hacemos una breve relación:

1) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 1 + \operatorname{tag}^2 x = \sec^2 x \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

2) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

3) $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

4) $\operatorname{sen} x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

5) $\operatorname{sen} x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)\right]$

$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x - y) - \cos(x + y)\right]$

$\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x - y) + \cos(x + y)\right]$

Volver al Índice

5.2. Cambios de variable

Vamos a resolver integrales de funciones racionales de funciones trigonométricas, a las que denotaremos en general por $R(\text{sen}x, \cos x)$, mediante una serie de cambios de variable que nos mostrarán que la función $R(\text{sen}x, \cos x)$ es integrable de manera sencilla. Con estos cambios de variable, pasaremos a una función integrable de manera inmediata o a una función racional de las estudiadas en el capítulo anterior, quedando el problema resuelto de una forma u otra. La elección del cambio de variable que resuelve una integral del tipo tratado aquí dependerá de cómo sea la función $R(\text{sen}x, \cos x)$. Además, una vez elegido el cambio de variable que parezca más apropiado, deberemos obtener las expresiones de $\text{sen}x$ y $\cos x$ en función de esta nueva variable (ya que cualquier otra función trigonométrica se puede expresar fácilmente en términos de estas dos) así como del término dx en función de la diferencial de la nueva variable. Veamos los diferentes cambios de variable que podremos aplicar:

A) Cambio $tg\left(\dfrac{x}{2}\right) = t$. Este cambio de variable siempre se puede utilizar; pero, en general, cuando se pueda realizar alguno de los otros cambios que veremos más adelante, resultará en una integral más sencilla a resolver. Para el cálculo de $\text{sen}x$ y $\cos x$ en términos de t, usamos las fórmulas del ángulo doble y la igualdad fundamental de la trigonometría:

$$\text{sen}x = \frac{2\text{sen}(x/2)\cos(x/2)}{\text{sen}^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = \frac{2\text{tg}(x/2)}{\text{tg}^2(x/2)+1} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2(x/2)-\text{sen}^2(x/2)}{\text{sen}^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = \frac{1-\text{tg}^2(x/2)}{1+\text{tg}^2(x/2)} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Finalmente, para calcular dx derivamos miembro a miembro la igualdad dada por el cambio de variable y despejamos, obteniendo que:

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

Con este cambio la integral original queda de la forma:

$$\int R(\text{sen}x, \cos x)\, dx = 2 \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \frac{dt}{1+t^2}$$

que resulta en una integral de una función racional del tipo de las vistas en el capítulo anterior.

Ejemplo

$$I = \int \frac{dx}{\text{sen}x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{dt}{t} = \text{Log}\ |\ t\ |\ + C = \text{Log}\ |\text{tg}(x/2)|\ + C$$

Nota

Para los siguientes cambios de variable necesitamos recordar los conceptos de simetrías para funciones de dos variables, generalizados de manera natural de los análogos para una variable:

$f(x\ , y)$ es impar en x si $f(-x\ , y) = -\, f(x\ , y)$
$f(x\ , y)$ es impar en y si $f(x\ , -y) = -\, f(x\ , y)$
$f(x\ , y)$ es par en x e y si $f(-x\ , -y) = f(x\ , y)$

En nuestro caso, identificaremos a la función de dos variables como la función racional de funciones trigonométricas, es decir, $f(x\ , y) \equiv R(\text{sen}x, \cos x)$. Cada una de estas tres simetrías da lugar a un cambio de variable distinto.

B) Si $R(\text{sen}x, \cos x)$ es una función par en sen$x$ y cos$x$, es decir, se tiene que $R(-\text{sen}x, -\cos x) = R(\text{sen}x, \cos x)$, entonces el cambio a realizar es de la forma: $\text{tg}x = t$. Utilizando las relaciones entre sen$x$, cos$x$, y tg$x$, obtenemos:

$$1 + \text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \Rightarrow \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\operatorname{sen}x = \operatorname{tg}x \cos x \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{sen}x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Finalmente, derivando miembro a miembro, $\operatorname{tg}x = t \quad \Rightarrow \qquad dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$

A pesar de las expresiones irracionales que aparecen en la obtención de las expresiones de sen$x$, cos$x$, en función de la nueva variable t, éstas desaparecen en la integral que resulta una vez realizado el cambio de variable, debido a la simetría par en sen$x$, cos$x$, y al tipo de operaciones (productos) que aparecen. Un caso particular sería:

$$I = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \ (m,n \text{ de igual paridad}) =$$

$$= \int \frac{t^m}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^m} \frac{1}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^n} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^m}{\left(1+t^2\right)^{1+\frac{m+n}{2}}} dt \, ,$$

donde $\dfrac{m+n}{2}$ es un entero.

Ejemplo

$$I = \int \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x} dx = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{\left(1+2t^2\right)\left(1+t^2\right)}$$

Esta integral es del tipo de las estudiadas en el capítulo anterior, como cociente de polinomios en t. Aparecen dos parejas de raíces complejas conjugadas simples como ceros del denominador, por lo que, aplicando el método de fracciones simples, resulta en una descomposición del tipo:

$$\frac{1}{\left(1+2t^2\right)\left(1+t^2\right)} = \frac{Mt+N}{1+2t^2} + \frac{Pt+Q}{1+t^2}$$

donde, poniendo denominador común e igualando los numeradores que resultan, llegamos al sistema que nos proporcionará el valor de las constantes, sin más que igualar los coeficientes de los términos del mismo grado a ambos lados de la igualdad:

t^3 :	$0 = M+2P$
t^2 :	$0 = N+2Q$
t :	$0 = M+P$
1:	$1 = N+Q$

Resolviendo: $M = 0$, $N = 2$, $P = 0$, $Q = -1$
Así, la integral queda:

$$I = 2 \int \frac{dt}{1+2t^2} - \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}t\right)^2+1} dt - \int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \sqrt{2}\ \text{arctg}\left(\sqrt{2}\, t\right) - \text{arctg}\, t + C = \sqrt{2}\ \text{arctg}\left(\sqrt{2}\ \text{tgx}\right) - x + C$$

C) Si $R(\text{sen}x, \cos x)$ es impar en $\cos x$, es decir, $R(\text{sen}x, -\cos x) = -R(\text{sen}x, \cos x)$ entonces:

$$\int \frac{R(\text{sen}x, \cos x)}{\cos x} \cos x\, dx = \int R_1(\text{sen}x, \cos x) \cos x\, dx$$

donde $R_1(\text{sen}x, \cos x)$ es par en $\cos x$, y haciendo el cambio $\text{sen}x = t$, llegamos a la integral de una función racional de las estudiadas en el capítulo anterior. De manera sencilla, con este cambio se obtiene que:

$$\cos x = \sqrt{1-t^2} \qquad , \qquad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Como en el caso anterior, no aparecerán funciones irracionales en la nueva integral, debido a la imparidad de la función $\cos x$.
Un caso particular, con n impar, sería:

$$I = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \int t^m \left(\sqrt{1-t^2}\right)^n \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^m \left(1-t^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dt$$

que es integrable de manera sencilla, puesto que si n es impar, $n - 1$ es par, y así, $\dfrac{n-1}{2}$ es entero.

Ejemplo

$$I = \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{1}{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\left(1-t^2\right)^2}$$

Las raíces del denominador de este cociente de polinomios son reales dobles, $t = 1$, $t = -1$, por lo que, aplicando el método de descomposición de facciones simples, llegamos a que:

$$\frac{1}{\left(1-t^2\right)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{1+t} + \frac{D}{(1+t)^2}$$

Poniendo denominador común:

$$1 = A(1-t)(1+t)^2 + B(1+t)^2 + C(1-t)^2(1+t) + D(1-t)^2$$

Dando valores a la variable t, los de las raíces reales distintas, y otros dos más de manera arbitraria, se llega al sistema cuya solución son los valores de las constantes a determinar:

$t = 1$:	$1 = 4B$
$t = -1$:	$1 = 4D$
$t = 0$:	$1 = A + B + C + D$
$t = 2$:	$1 = -9A + \dfrac{9}{4} + 3C + \dfrac{1}{4}$

Resolviendo:

$$A = \frac{1}{4}\ , \qquad B = \frac{1}{4}\ , \qquad C = \frac{1}{4}\ , \qquad D = \frac{1}{4}$$

Así, la integral queda de la forma:

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(1-t)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(1+t)^2} =$$
$$= -\frac{1}{4}\text{Log}\,|\,1 - t\,| + \frac{1}{4(1-t)} + \frac{1}{4}\text{Log}\,|\,1+t\,| - \frac{1}{4(1+t)} + C =$$
$$= \frac{1}{4}\text{Log}\,\frac{|1+\text{sen}x|}{|1-\text{sen}x|} + \frac{1}{4(1-\text{sen}x)} - \frac{1}{4(1+\text{sen}x)} + C$$

D) De forma similar al caso anterior, si $R(\text{sen}x, \cos x)$ es impar en sen$x$, es decir, si $R(-\text{sen}x, \cos x) = -R(\text{sen}x, \cos x)$, el cambio de variable a realizar será de la forma $\cos x = t$, puesto que:

$$\int R(\text{sen}x, \cos x)\, dx = \int \frac{R(\text{sen}x, \cos x)\,\text{sen}x}{\text{sen}x}\, dx = \int R_1(\text{sen}x, \cos x)\, dx$$

donde $R_1(\text{sen}x, \cos x)$ es par en sen$x$. Así, como en el caso anterior, se obtiene de manera inmediata que:

$$\cos x = t\ , \qquad \text{sen}x = \sqrt{1-t^2}\ , \qquad dx = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Un caso particular sería, con m impar:

$$I = \int \text{sen}^m x \cos^n x\, dx = \int \cos^n x\, \text{sen}^{m-1} x\, \text{sen}x\, dx =$$
$$= -\int t^n \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{m-1} dt$$

que es integrable de forma sencilla, puesto que, si m es impar, m - 1 es par, y, por tanto, $\frac{m-1}{2}$ es entero.

Ejemplo

$$I = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x + 2\cos^2 x \operatorname{sen} x}\, dx = \int \frac{t}{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 + 2t^2\sqrt{1-t^2}} \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= -\int \frac{tdt}{\left(1-t^2\right)^2 + 2t^2\left(1-t^2\right)} = -\int \frac{tdt}{\left(1-t^2\right)\left(1-t^2+2t^2\right)} =$$

$$= -\int \frac{tdt}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}$$

Las raíces del denominador son $t = 1$, $t = -1$, reales simples, y una pareja de complejas conjugadas simples. De nuevo, el método de fracciones simples nos proporciona la siguiente descomposición:

$$\frac{-t}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} + \frac{Ct+D}{1+t^2} =$$

$$= \frac{A(1-t)\left(1+t^2\right) + B(1+t)\left(1+t^2\right) + (Ct+D)\left(1-t^2\right)}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)}$$

Dando valores a la variable t, resulta el sistema:

$t = 1$:	$-1 = 4B$
$t = -1$:	$1 = 4A$
$t = 0$:	$0 = A + B + D$
$t = 2$:	$-2 = -5A + 15B - 6C - 3D$

cuya única solución es:

$$A = \frac{1}{4}, \qquad B = -\frac{1}{4}, \qquad C = -\frac{1}{2}, \qquad D = 0$$

Por lo que, la integral original se puede descomponer como:

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1-t} - \frac{1}{2}\int \frac{tdt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{4}\text{Log } |1 + t| + \frac{1}{4}\text{Log } |1 - t| - \frac{1}{4}\text{Log } |t^2 + 1| + C =$$

$$= \text{Log } \sqrt[4]{\frac{|1-t^2|}{|1+t^2|}} + C = \text{Log } \sqrt[4]{\frac{|1-cos^2 x|}{|1+cox^2 x|}} + C =$$

$$= \text{Log } \sqrt[4]{\frac{\text{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}} + C$$

Volver al Índice

5.3. Transformación en sumas

Estos cambios de variables que hemos visto no son, obviamente, la única posibilidad que existe para resolver integrales racionales de funciones trigonométricas. En general, merece la pena estudiar de manera breve la función que queremos integrar, por si la aplicación de alguna de las relaciones trigonométricas conocidas nos permite reducir dicha función de forma sencilla a otra función cuya integración sea mucho más rápida. Además, no todas las funciones racionales de funciones trigonométricas aparecen en la forma en la que podemos aplicar alguno de los cambios de variable comentado. Por ejemplo, si en la función a integrar aparecen razones trigonométricas de ángulos distintos, un primer paso necesario consiste en pasarlas todas al mismo ángulo. En este caso, las ecuaciones que nos relacionan los productos de razones trigonométricas de ángulos distintos con sumas de razones trigonométricas pueden resolver el problema:

a) $\int \text{sen}(mx)\,\text{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos[(m-n)x]\,dx - \frac{1}{2}\int \cos[(m+n)x]\,dx$

b) $\int \text{sen}(mx)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int \text{sen}[(m-n)x]\,dx + \frac{1}{2}\int \text{sen}[(m+n)x]\,dx$

c) $\int \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos[(m-n)x]\,dx + \frac{1}{2}\int \cos[(m+n)x]\,dx$

Nótese que, aunque las razones trigonométricas que aparecen sumando también se refieren a ángulos distintos, la diferencia fundamental estriba en que, mientras las integrales de productos no se pueden separar, las integrales de sumas sí pueden hacerlo en sumas de integrales, por la linealidad de la integral, apareciendo de esta forma los ángulos distintos en integrales distintas, lo que, obviamente, no es ningún problema.

Volver al Índice

5.4. Problemas resueltos

1) $I = \int \frac{1+\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x\cos x}\,dx = \{\ \operatorname{tg}(x/2) = t\ \} = \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\,\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2dt}{1+t^2} =$

$= \int \frac{t^2+2t+1}{2t(1-t^2)}\,2dt = \int \frac{(t+1)^2}{t(1-t^2)}\,dt = \int \frac{t+1}{t(1-t)}\,dt$

Las raíces del denominador son reales simples; por lo tanto, el método a utilizar será el de fracciones simples.

$\frac{t+1}{t(1-t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} \Rightarrow t+1 = A(1-t) + Bt \Rightarrow A=1\ ,\ B=2$

$I = \int \frac{dt}{t} + 2\int \frac{dt}{1-t} = \operatorname{Log}|t| - 2\operatorname{Log}|1-t| + C =$

$= \operatorname{Log}|\operatorname{tg}(x/2)| - 2\operatorname{Log}|1-\operatorname{tg}(x/2)| + C$

2) $I = \int \frac{dx}{1+\operatorname{tg}x} = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x+\cos x}\,dx = \{\ \operatorname{tg}(x/2) = t\ \} =$

$$= \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int \frac{1-t^2}{(2t+1-t^2)(1+t^2)}dt$$

Las raíces del denominador son dos irracionales y otras dos complejas conjugadas, todas ellas simples. Si aplicamos el método de fracciones simples para descomponer esta función, deberemos trabajar con números irracionales. Antes de seguir adelante, probemos otro cambio de variable distinto de este general. Obsérvese que la función a integrar es par en sen$x$, cos$x$, por lo que podemos intentar el cambio de variables tg$x = t$.

$$I = \int \frac{dx}{1+tg\,x} = \{\ \mathrm{tg}x = t\ \} = \int \frac{1}{1+t}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)}$$

Aunque en este caso, también aplicaremos el método de descomposición de fracciones simples, las raíces del denominador ahora son una entera $t = -1$, y una pareja de complejas conjugadas, todas simples. A diferencia del cambio de variable anterior, hemos salvado operar con números irracionales.

$$\frac{1}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1}$$

Poniendo denominador común, obtenemos que:

$$1 = A(t^2 + 1)+(B\,t + C)(t + 1) = A\,t^2 + A + B\,t^2 + B\,t + C\,t + C$$

Igualando los coeficientes de los términos del mismo grado, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{array}{ll} t^2: & 0 = A + B \\ t: & 0 = B + C \\ 1: & 1 = C \end{array}$$

cuya solución es:

$$A = \frac{1}{2}\ , \qquad B = -\frac{1}{2}\ , \qquad C = \frac{1}{2}$$

La integral original quedará como:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{2}\int \frac{t-1}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}|t+1| - \frac{1}{4}\,\mathrm{Log}|t^2+1| + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\ t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\ |1+\mathrm{tg}x| - \frac{1}{4}\,\mathrm{Log}\ |1+\mathrm{tg}^2 x| + \frac{1}{2}x + C$$

3) $$I = \int \frac{dx}{2\mathrm{sen}x - \cos x + 5} = \{\ \mathrm{tg}(x/2) = t\ \} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} =$$

$$= \int \frac{2dt}{4t - 1 + t^2 + 5 + 5t^2} = \int \frac{2dt}{6t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 2} =$$

$$= \int \frac{dt}{\left(\sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{5}{3}} = \frac{3}{5}\int \frac{dt}{\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \mathrm{arctg}\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right) + C =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}\ \mathrm{arctg}\left(\frac{1+3tg(x/2)}{\sqrt{5}}\right) + C$$

4) $$I = \int \frac{\mathrm{sen}x}{1+\cos x + \mathrm{sen}x}dx = \{\ \mathrm{tg}(x/2) = t\ \} = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{4tdt}{(1+t^2)(1+t^2+1-t^2+2t)} = \int \frac{4tdt}{2(1+t^2)(t+1)} =$$

$$= \int \frac{2t\,dt}{(t+1)(t^2+1)}$$

Una vez más, las raíces del denominador nos permiten aplicar el método de descomposición de fracciones simples:

$$\frac{2t}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} \Rightarrow$$

$$2t = At^2 + A + Bt^2 + Bt + Ct + C$$

Igualando los coeficientes de los términos del mismo grado, obtenemos:

$$\begin{array}{ll} t^2: & 0 = A + B \\ t: & 2 = B + C \\ 1: & 0 = A + C \end{array}$$

cuya solución es:

$$A = -1 \ , \ B = 1 \ , \ C = 1$$

La integral queda como:

$$I = -\int \frac{dt}{t+1} + \int \frac{t+1}{t^2+1}\,dt = -\operatorname{Log}|t+1| + \frac{1}{2}\operatorname{Log}|t^2+1| + \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= -\operatorname{Log}|1+\operatorname{tg}(x/2)| + \frac{1}{2}\operatorname{Log}|1+\operatorname{tg}^2(x/2)| + \frac{x}{2} + C$$

5) $$I = \int \frac{\operatorname{sen}x\cos x + \cos^4 x}{2+\operatorname{sen}x\cos x}\,dx = \{\ \operatorname{tg}x = t\ \} =$$

$$= \int \frac{\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} + \dfrac{1}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^4}}{2+\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}} \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{\dfrac{t}{1+t^2} + \dfrac{1}{\left(1+t^2\right)^2}}{2+\dfrac{t}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{\dfrac{t\left(1+t^2\right)+1}{\left(1+t^2\right)^2}}{\dfrac{2\left(1+t^2\right)+t}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{t^3+t+1}{\left(1+t^2\right)^2\left(2t^2+t+2\right)} dt$$

En este caso, el denominador posee una pareja de raíces complejas conjugadas dobles, por lo que es necesario aplicar el método de descomposición de Hermite:

$$\frac{t^3+t+1}{\left(1+t^2\right)^2\left(2t^2+t+2\right)} = \frac{d}{dt}\left[\frac{at+b}{1+t^2}\right] + \frac{Mt+N}{1+t^2} + \frac{Pt+Q}{2t^2+t+2}$$

Realizando la derivada del cociente, poniendo denominador común e igualando los coeficientes de los términos del mismo grado, llegamos al siguiente sistema lineal que nos proporcionará el valor de las constantes:

$$\begin{array}{ll}
t^5: & 0 = 2M + P \\
t^4: & 0 = -2a + M + 2N + Q \\
t^3: & 1 = -4b - a + 4M + N + 2P \\
t^2: & 0 = -2b + M + 4N + 2Q \\
t: & 1 = a - 4b + 2M + N + P \\
1: & 1 = 2a + 2N + Q
\end{array}$$

cuya única solución resulta ser:

$$a = 0\ ,\ b = \frac{1}{2}\ ,\ M = -1,\ P = 2\ ,\ \ Q = -5$$

Llevamos estos valores a la integral original, con lo que:

$$I = \frac{1}{2(1+t^2)} + \int \frac{3-t}{t^2+1}\,dt + \int \frac{2t-5}{2t^2+t+2}\,dt = \frac{1}{2(1+t^2)} +$$

$$+3\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left|t^2+1\right| + \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left|2t^2+t+2\right| - \frac{11}{2}\int \frac{dt}{2t^2+t+2}$$

Calculemos esta nueva integral por separado:

$$I_1 = \int \frac{dt}{2t^2+t+2} = \int \frac{dt}{\left(\sqrt{2}t + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{15}{8}} = \frac{8}{15}\int \frac{dt}{\left(\frac{4t+1}{\sqrt{15}}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{2\sqrt{15}}{15}\operatorname{arctg}\left(\frac{4t+1}{\sqrt{15}}\right) + C$$

Por tanto, la integral I quedará de la siguiente forma:

$$I = \frac{1}{2(1+t^2)} + 3\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(t^2+1\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left|2t^2+t+2\right| -$$

$$-\frac{11}{2}\frac{2\sqrt{15}}{15}\operatorname{arctg}\left(\frac{4t+1}{\sqrt{15}}\right) + C$$

$$I = \frac{1}{2(1+\operatorname{tg}^2 x)} + \operatorname{Log}\sqrt{\frac{2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 2}{1+\operatorname{tg}^2 x}} - \frac{11}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1+4\operatorname{tg} x}{\sqrt{15}}\right) + C$$

$$6)\ I = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+\cos x} dx = \int \frac{\operatorname{sen} x\left(1-\cos^2 x\right)}{1+\cos x} dx = \int \operatorname{sen} x\left(1-\cos x\right) dx =$$

$$= \int \operatorname{sen} x \, dx - \int \operatorname{sen} x \cos x \, dx = -\cos x - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x + C$$

$$7)\ I = \int \frac{2+\operatorname{Log}^2 |x|}{x \operatorname{Log}|x| - x} dx = \{ \operatorname{Log} x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt \} = \int \frac{2+t^2}{t-1} dt =$$

$$= \int (t+1)\, dt + 3 \int \frac{dt}{t-1} = \frac{t^2}{2} + t + 3\operatorname{Log}|t-1| + C =$$

$$= \frac{\operatorname{Log}^2 |x|}{2} + \operatorname{Log}|x| + 3\operatorname{Log}\left|\operatorname{Log}|x| - 1\right| + C$$

$$8)\ I = \int \frac{\operatorname{sen}(x/2)\cos(5x/2)}{\operatorname{sen} 3x} dx$$

Como las razones trigonométricas que aparecen en la integral están referidas a ángulos distintos, el primer paso, antes de pensar en algún cambio de variable, debe ser intentar pasar esta expresión a otra igual donde las nuevas razones trigonométricas estén referidas al mismo ángulo. Utilizamos para ello las fórmulas que relacionan productos con sumas de funciones trigonométricas.

$$\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)\right] \ Þ$$

$$\operatorname{sen}(x/2)\cos(5x/2) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 2x\right)$$

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 3x &= \operatorname{sen}(2x+x) = \operatorname{sen} x \cos 2x + \cos x \operatorname{sen} 2x = \\
&= \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x + 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x = \\
&= 3 \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x = 3 \operatorname{sen} x\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right) - \operatorname{sen}^3 x = \\
&= \operatorname{sen} x\left(3 - 4\operatorname{sen}^2 x\right)
\end{aligned}$$

Así, tenemos que:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\text{sen}3x - \text{sen}2x}{\text{sen}3x}\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \frac{\text{sen}\,2x}{\text{sen}3x}\,dx$$

$$I_1 = \int \frac{\text{sen}2x}{\text{sen}3x}dx = 2\int \frac{\text{sen}x\cos x}{\text{sen}x\left(3-4\text{sen}^2 x\right)}dx = 2\int \frac{\cos x}{3-4\text{sen}^2 x}\,dx =$$

$$= \{\ \text{sen}x = t \Rightarrow \cos x\ dx = dt\ \} = 2\int \frac{dt}{3-4t^2} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{1-\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \left\{ \frac{2t}{\sqrt{3}} = u \ \Rightarrow\ dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{du} \right\} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{du}{1-u^2}$$

Esta última integral la descomponemos por el método de fracciones simples:

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} = \frac{A(1+u)+B(1-u)}{1-u^2} \Rightarrow\ A = \frac{1}{2}\ ,\ B = \frac{1}{2}$$

Por tanto,

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\text{Log}|1 - u| + \frac{1}{2\sqrt{3}}\text{Log}|1 + u| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\text{Log}\frac{|1+u|}{|1-u|} + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\text{Log}\ \frac{|\sqrt{3}+2t|}{|\sqrt{3}-2t|} + C$$

Finalmente,

$$I = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4\sqrt{3}}\text{Log}\ \frac{|\sqrt{3}-2\text{sen}x|}{|\sqrt{3}+2\text{sen}x|} + \text{C}$$

Volver al Índice

5.5. Integración por recurrencia

Veremos aquí una técnica general de integración, llamada integración por recurrencia, en el caso particular que nos ocupa en este capítulo, es decir, para funciones racionales que contengan a funciones trigonométricas. Esta técnica se aplica para el cálculo de integrales de funciones que dependan de algún parámetro, expresando la integral deseada en términos de otra de similar enunciado en la que el parámetro haya disminuido. Una vez conseguida esta relación, bastará aplicar recurrencia para poder expresar la integral original en función del parámetro y de otra integral que ya no contenga a dicho parámetro.

Ejemplo

$$I_{m,n} = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$$

Para calcular esta integral, tomamos partes de la siguiente manera:

Si $m < 0$ y $n > 0$:

$$\left\{ \begin{array}{lll} u = \cos^{n-1} x & \Rightarrow & du = (n-1)\cos^{n-2} x\,(-\operatorname{sen} x)dx \\ dv = \operatorname{sen}^m x \cos x\, dx & \Rightarrow & v = \dfrac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1} \end{array} \right\}$$

Además, teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}^{m+2} x = \operatorname{sen}^m x\ (1 - \cos^2 x)$, obtenemos

$$I_{m,n} = \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \cos^{n-2} x \operatorname{sen}^{m+2} x\, dx =$$

$$= \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x\, dx -$$

$$- \frac{n-1}{m+1}\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\, I_{m,n-2} -$$

$$-\frac{n-1}{m+1}\,I_{m,n}$$

Despejando $I_{m,n}$ en esta igualdad, resulta que:

$$I_{m,n}=\frac{\operatorname{sen}^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}$$

Si $m>0$ y $n<0$:

$$\left\{\begin{array}{lcr} u=\operatorname{sen}^{m-1}x & \Rightarrow & du=(m-1)\operatorname{sen}^{m-2}x\cos x\,dx \\ dv=\cos^{n}x\,\operatorname{sen}x\,dx & \Rightarrow & v=-\dfrac{\cos^{n+1}x}{n+1}\end{array}\right\}$$

Procediendo análogamente, llegamos a que:

$$I_{m,n}=-\frac{\cos^{n+1}x\operatorname{sen}^{m-1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}I_{m-2,n}$$

Si $m<0$ y $n<0$, en lugar de despejar $I_{m,n}$, se despejan $I_{m-2,n}$ o $I_{m,n-2}$

En cualquiera de las tres posibilidades, aplicando de forma sucesiva la integración por partes a cada nueva integral que va apareciendo, todo se reduce a calcular $I_{m,0}$, o $I_{0,n}$. Veamos cómo se calcularían éstas últimas:

$$I_{m,0}=\int\operatorname{sen}^{m}x\,dx$$

Elegimos integración por partes, de la siguiente manera:

$$\left\{\begin{array}{lcr} u=\operatorname{sen}^{m-1}x & \Rightarrow & du=(m-1)\operatorname{sen}^{m-2}x\cos x\,dx \\ dv=\operatorname{sen}x\,dx & \Rightarrow & v=-\cos x\end{array}\right\}$$, de modo que tenemos

$$I_{m,0} = -\cos x \,\mathrm{sen}^{m-1} x + (m-1)\int \mathrm{sen}^{m-2} x \cos^2 x \, dx$$

y, como, de nuevo,

$$\mathrm{sen}^{m-2} x \cos^2 x = \mathrm{sen}^{m-2} x \left(1 - \mathrm{sen}^2 x\right) = \mathrm{sen}^{m-2} x - \mathrm{sen}^m x$$

se tiene que la igualdad anterior queda como:

$$I_{m,0} = -\cos x \,\mathrm{sen}^{m-1} x + (m-1)\int \mathrm{sen}^{m-2} x \, dx - (m-1)\int \mathrm{sen}^m x \, dx =$$

$$= -\cos x \,\mathrm{sen}^{m-1} x + (m-1) I_{m-2,0} - (m-1) I_{m,0}$$

Despejando $I_{m,0}$ de esta igualdad:

$$I_{m,0} = -\frac{\cos x \,\mathrm{sen}^{m-1} x}{m} + \frac{m-1}{m} I_{m-2,0}$$

De nuevo obtenemos una recurrencia, pero, a diferencia del caso anterior, ésta sólo depende de un parámetro, y bastará conocer el valor de $I_{0,0}$, o de $I_{1,0}$. En cualquiera de los dos casos, resultan en integrales inmediatas, ya que:

$$I_{0,0} = \int dx = x + C \quad , \quad I_{1,0} = \int \mathrm{sen} x \, dx = -\cos x + C$$

Para el cálculo de $I_{0,n} = \int \cos^n x \, dx$, procediendo de manera análoga, se llega a que:

$$I_{0,n} = \int \cos^n x \, dx = \frac{\mathrm{sen} x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

Similarmente, bastará conocer el valor de $I_{0,0}$, o de $I_{0,1}$. En cualquiera de los dos casos, también resultan en integrales inmediatas, ya que:

$$I_{0,0} = \int dx = x + C \quad , \quad I_{0,1} = \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$$