CAPÍTULO 6. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES IRRACIONALES

6.1. Introducción

6.2. Integrales irracionales simples

6.3. Integrales irracionales lineales

6.4. Integrales irracionales de polinomios de grado dos no completos

6.5. Integrales irracionales de polinomios de grado dos completos

6.6. Integrales irracionales compuestas

Capítulo 6
Integración de funciones irracionales

$$\int R(x, x^{p/q}, x^{r/s}, \ldots, x^{u/v})\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2 - b^2}}$$

$$\int \sqrt{a^2x^2 + b^2}\,dx$$

Capítulo 6
Integración de funciones irracionales

Volver al Índice

6.1. Introducción

En este capítulo trataremos de resolver integrales de funciones irracionales de polinomios. En el caso más general de funciones irracionales que afecten a otras funciones cualesquiera, se podrán intentar primero procedimientos de integración para reducir esas integrales a estas que vamos a estudiar.

En general, se tratará de «eliminar» las raíces de la función a integrar a través de algún cambio de variable apropiado. Obviamente, algunas funciones con raíces en su formulación poseen una primitiva de manera inmediata, en las que no será necesario «eliminar» dicha raíz.

Volver al Índice

6.2. Integrales irracionales simples

En primer lugar, vamos a contemplar el caso más sencillo, en el que las funciones irracionales afecten solamente a monomios en la variable x, permitiendo además que las raíces que aparezcan posean índices distintos. Así, sea $I = \int R\left(x, x^{p/q}, x^{r/s}, \ldots, x^{u/v}\right) dx$, donde por R denotamos la función en la que van a aparecer las raíces de x. Para que desaparezcan todas las raíces de distintos índices a la vez, basta con realizar el cambio de variable:

$$x = t^N \text{, donde } N = m.c.m.(q, s, \ldots, v) \text{, y, por tanto,} \quad dx = Nt^{N-1}\,dt$$

Ejemplo

$$I = \int \frac{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$$

En este caso, el mínimo común múltiplo de todos los índices distintos que aparecen en la función a integrar es $N = 6$, y, por lo tanto, haciendo el cambio de variable, $x = t^6$, con lo que $dx = 6t^5\,dt$, la integral I queda de la forma:

$$I = \int \frac{1+t^3+t^4}{1+t^2} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^9+t^8+t^5}{t^2+1} dt$$

La función que resulta a integrar es un cociente de polinomios donde el grado del numerador es estrictamente mayor que el del denominador. El primer paso será, como vimos en el capítulo 4, realizar la división entera de polinomios. Una vez realizada, llegamos a que I queda:

$$I = 6 \int \left(t^7+t^6-t^5-t^4+2t^3+t^2-2t-1\right) dt + 6 \int \frac{2t+1}{t^2+1} dt =$$

$$= \frac{6t^8}{8} + \frac{6t^7}{7} - \frac{6t^6}{6} - \frac{6t^5}{5} + \frac{12t^4}{4} + \frac{6t^3}{3} - \frac{12t^2}{2} - 6t +$$

$$+ 6 \text{ Log}\left|t^2+1\right| + 6 \text{ arctg } t + C = \frac{3}{4} x^{4/3} + \frac{6}{7} x^{7/6} - x - \frac{6}{5} x^{5/6} +$$

$$+ 3x^{2/3} + 2x^{1/2} - 6x^{1/3} - 6x^{1/6} + 6\text{Log}\left|x^{1/3}+1\right| + 6\text{arctg}\left(x^{1/6}\right) + C$$

Volver al Índice

6.3. Integrales irracionales lineales

Consideraremos ahora el caso en que la función a integrar dependa de x, y a lo sumo de cocientes de polinomios de grado uno (lineales), tanto en el numerador como en el denominador. De nuevo, las raíces que afecten a estos términos pueden poseer índices distintos. Es decir,

$$I = \int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{u/v}\right] dx$$

De forma similar al caso anterior, con el objeto de transformar la integral original en otra donde la función a integrar ya no contenga raíces, realizamos el cambio de variable:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^N, \text{ donde } N = m.c.m.(q,s,\ldots,v)$$

Al igual que en el caso anterior, este cambio garantiza que en la nueva integral todas las raíces han desaparecido, llegando a una función racional de las del tipo estudiado en el capítulo 4.

Nótese que, a diferencia del caso anterior, no hemos escrito la relación general que permite cambiar dx por dt, debido a su expresión demasiado engorrosa, en términos de las constantes. Desde luego, en la práctica habrá que encontrar esta relación, siendo bastante sencilla de hallar.

Ejemplos

1) $I = \int \frac{dx}{(1-2x)^{2/3} - (1-2x)^{1/2}}$

En este ejemplo, identificamos $a = -2$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$, con lo que el cambio de variable a realizar con $N = 6$, será: $1 - 2x = t^6$, de donde se deduce de manera inmediata que $dx = -3t^5 dt$. Con este cambio la integral quedará:

$$I = \int \frac{-3t^5}{t^4 - t^3}\,\mathrm{dt} = -3\int \frac{t^2}{t-1}\,\mathrm{dt}$$

De nuevo, el cociente de polinomios que resulta para integrar posee grado del numerador mayor que el del denominador, por lo que, realizando la división entera de polinomios y llevándola a la integral, resulta en:

$$I = -3\int (t+1)\,dt - 3\int \frac{dt}{t-1} = -\frac{3}{2}t^2 - 3t - 3\mathrm{Log}|t-1| + C =$$
$$= -\frac{3}{2}(1-2x)^{1/3} - 3(1-2x)^{1/6} - 3\mathrm{Log}\left|(1-2x)^{1/6} - 1\right| + C$$

2) $I = \int \frac{x^4}{\sqrt{2+x}}\,dx$

En este caso, tenemos que $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$, $d = 1$, por lo que el cambio que debemos realizar es de la forma: $2 + x = t^2$, y, así, $dx = 2t\,dt$, quedando la integral como:

$$I = \int \frac{(t^2-2)^4}{t} 2t\, dt = 2\int (t^2-2)^4\, dt = 2\int (t^4-4t^2+4)^2\, dt =$$
$$= 2\int (t^8+16t^4+16-8t^6+8t^4-32t^2)\, dt =$$
$$= 2\int (t^8-8t^6+24t^4-32t^2+16)\, dt =$$
$$= \frac{2}{9}(2+x)^{9/2} - \frac{16}{7}(2+x)^{7/2} + \frac{48}{5}(2+x)^{5/2} - \frac{64}{3}(2+x)^{3/2} +$$
$$+ 32(2+x)^{1/2} + C$$

Volver Ejemplo

3) $I = \int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}\, dx$

Esta integral tiene la forma vista en el apartado 6.2. Nótese que, si elegimos $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$, cualquier integral de la forma expresada en 6.2 se puede expresar en la forma vista en 6.3. De hecho, el caso 6.2 no es nada más que un caso particular y previo al caso más general enunciado aquí. De cualquiera de las formas, el cambio de variable necesario es como sigue:

$$x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$$

De este modo, la integral adopta la expresión:

$$I = \int \frac{2+t^2}{t+t^2+t^3+1} 6t^5 dt = 6\int \frac{t^7+2t^5}{t^3+t^2+t+1} dt$$

Realizando la división entera de polinomios, quedará reducida a:

$$I = 6\int (t^4-t^3+2t^2-2t+1)\, dt + 6\int \frac{-t^2+t-1}{(t+1)(t^2+1)} dt$$

Calculamos esta nueva integral, que tiene la forma vista en el capítulo 4, como función racional, por separado:

$$I_1 = \int \frac{-t^2+t-1}{(t+1)(t^2+1)}\,dt$$

Como veíamos en dicho capítulo, el primer paso es calcular los ceros del denominador (ya que el grado del numerador, 2, es menor estricto que el del denominador, 3). Estos ceros resultan ser $t = -1$, real y simple, y una pareja de números complejos conjugados también simples. Por tanto, la descomposición a efectuar es a través del método de fracciones simples:

$$\frac{-t^2+t-1}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{At^2+A+Bt^2+Bt+Ct+C}{(t+1)(t^2+1)}$$

Colocando denominador común y obteniendo un sistema lineal de ecuaciones para calcular el valor de las constantes indeterminadas, resultan en:

$$A = -\frac{1}{2} \quad , \quad \mathrm{B} = \mathrm{C} = \frac{1}{2}$$

Así,

$$I_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{t+1}{t^2+1}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{Log}|t+1| + \frac{1}{4}\mathrm{Log}|t^2+1| + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,t + C$$

Llevando este resultado a la integral original I, tenemos que:

$$I = \frac{6}{5}t^5 - \frac{6}{4}t^4 + \frac{12}{3}t^3 - \frac{12}{2}t^2 + 6t - 3\mathrm{Log}|t+1| + \frac{3}{2}\mathrm{Log}(t^2+1) +$$

$$+3\mathrm{arctg}\,t + C = \frac{6}{5}x^{5/6} - \frac{3}{2}x^{2/3} + 4x^{1/2} - 6x^{1/3} + 6x^{1/6} -$$

$$-3\mathrm{Log}|x^{1/6}+1| + \frac{3}{2}\mathrm{Log}|x^{1/3}+1| + 3\mathrm{arctg}(x^{1/6}) + C$$

4) $I = \displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$

Una vez más, el cambio de variable a realizar en esta integral es:

$$x = t^6 \Rightarrow \; dx = 6t^5 dt$$

de donde obtenemos que:

$$I = \int \frac{1+t^3-t^4}{1+t^2}6t^5 dt = 6 \int \frac{-t^9+t^8+t^5}{1+t^2}dt$$

que, realizando la división entera de polinomios, da:

$$\begin{aligned} I &= 6\int\left(-t^7+t^6+t^5-t^4+t^2-1\right)dt + 6\int\frac{dt}{t^2+1} = \\ &= -\frac{6}{8}t^8 + \frac{6}{7}t^7 + \frac{6}{6}t^6 - \frac{6}{5}t^5 + \frac{6}{3}t^3 - 6t + 6\operatorname{arctg} t + C = \\ &= -\frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{6}{7}x^{7/6} + x - \frac{6}{5}x^{5/6} + 2x^{1/2} - 6x^{1/6} + 6\operatorname{arctg}\left(x^{1/6}\right) + C \end{aligned}$$

5) $I = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x}+1}\,dx$

El cambio de variable ahora queda: $x = t^2$ Þ $dx = 2t\,dt$, de modo que la integral se convierte en:

$$\begin{aligned} I &= \int\frac{t^2}{t+1}2t\,dt = 2\int\frac{t^3}{t+1}dt = \\ &= 2\int\left(t^2-t+1\right)dt - 2\int\frac{dt}{t+1} = \frac{2}{3}t^3 - \frac{2}{2}t^2 + 2t - 2\operatorname{Log}\left|t+1\right| + C = \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2} - x + 2x^{1/2} - 2\operatorname{Log}\left|\sqrt{x}+1\right| + C \end{aligned}$$

una vez realizada la división entera de polinomios, y deshecho el cambio de variable.

6) $I = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx$

El cambio de variable en este caso queda: $x = t^4 \Rightarrow dx = 4t^3 dt$, con lo que la integral se transforma en:

$$I = \int \frac{t^4\, 4t^3}{t^2+t}dt = 4\int \frac{t^6}{t+1}dt =$$
$$= 4\int \left(t^5 - t^4 + t^3 - t^2 + t - 1\right)dt + 4\int \frac{dt}{t+1} =$$
$$= \frac{4}{6}t^6 - \frac{4}{5}t^5 + \frac{4}{4}t^4 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{4}{2}t^2 - 4t + 4\mathrm{Log}\left|t+1\right| + C =$$
$$= \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{4}{5}x^{5/4} + x - \frac{4}{3}x^{3/4} + 2x^{1/2} - 4x^{1/4} + 4\mathrm{Log}\left|x^{1/4}+1\right| + C$$

De nuevo hemos necesitado realizar la división entera de polinomios durante el proceso.

Volver
6.3

7) $I = \displaystyle\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2+x}{2-x}}\,dx$

Esta función a integrar tiene la forma más general dada en 6.3, donde identificamos $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$, $d = 2$. Con estos valores, el cambio de variable queda de la forma:

$$\frac{2+x}{2-x} = u^3$$

que permite despejar a la variable x en función de la nueva variable u:

$$x = \frac{2u^3 - 2}{1+u^3}$$

Con esta última relación, el cálculo de dx resulta más sencillo:

$$dx = \frac{12u^2}{\left(1+u^3\right)^2}\,du$$

Llevando todo el cambio completo a la integral original, obtenemos:

$$I = 2\int \frac{1}{\left[2-\frac{2u^3-2}{1+u^3}\right]^2}\,u\,\frac{12u^2}{\left(1+u^3\right)^2}\,du =$$

$$= 24\int \frac{u^3}{\left[\frac{4}{1+u^3}\right]^2\left(1+u^3\right)^2}\,du = \frac{24}{16}\int u^3 du = \frac{3}{2}\frac{u^4}{4} + C =$$

$$= \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left[\frac{2+x}{2-x}\right]^4} + C$$

Volver al Índice

6.4. Integrales irracionales de polinomios de grado dos no completos

En este apartado vamos a considerar el caso particular en que sólo aparezca una raíz cuadrada afectando únicamente a polinomios de grado 2 sin término de grado uno.

Veremos este caso en tres posibilidades, según el signo que posean los dos términos del polinomio de grado 2 que está afectado por la raíz cuadrada.

a) Supongamos, en primer lugar, que el signo del término de grado 2 es negativo y el de la constante, positivo. Esta situación se puede expresar como:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - a^2x^2}} \qquad \text{o} \qquad I_2 = \int \sqrt{b^2 - a^2x^2}\,dx$$

según la raíz aparezca multiplicando o dividiendo. En cualquiera de las dos posibilidades el cambio de variable que nos permite pasar a una integral de alguno de los tipos vistos hasta ahora, es decir, sin raíces en ella, es de la forma:

$$ax = b\,\mathrm{sen}\,t$$

de donde se deduce que

$$dx = \frac{b}{a}\cos t\,dt$$

Aplicando este cambio de variable a las dos posibilidades, llegamos a que:

$$I_1 = \int \frac{(b/a)\cos t}{\sqrt{b^2 - b^2\mathrm{sen}^2 t}}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{a}\int \frac{\cos t}{\cos t}\,dt = \frac{1}{a}\int dt =$$

$$= \frac{t}{a} + C = \frac{1}{a}\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{ax}{b}\right) + C$$

$$I_2 = \int \sqrt{b^2 - b^2\mathrm{sen}^2 t}\,\frac{b}{a}\cos t\,dt = \frac{b^2}{a}\int \cos^2 t\,dt = \frac{b^2}{a}\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{b^2}{2a}\left(t + \frac{\mathrm{sen}\,2t}{2}\right) + C = \frac{b^2}{2a}\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{ax}{b}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{b^2 - a^2x^2} + C$$

$$\left(\mathrm{sen}\,2t = 2\,\mathrm{sen}\,t\cos t = \frac{2ax}{b^2}\sqrt{b^2 - a^2x^2}\right)$$

Notemos que idénticos resultados se hubieran obtenido cambiando el papel de la función sen$t$ por cos$t$, es decir, realizando el cambio de variable:

$a\,x = b\cos t$, con lo que $a\,dx = -\,b\,\mathrm{sen}\,t\,dt$

b) En segundo lugar, consideremos el caso en que el signo del término de grado 2 sea positivo y el de la constante, negativo, en cualquiera de las dos posibilidades análogas al caso anterior, es decir:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2 - b^2}} \qquad \text{o} \qquad I_2 = \int \sqrt{a^2x^2 - b^2}\ dx$$

Con un razonamiento similar al del caso anterior, el cambio de variable que aplicaremos aquí es:

$$ax = \frac{b}{\operatorname{sen} t}$$

de donde:

$$dx = \frac{-b\cos t}{a\operatorname{sen}^2 t}\,dt$$

Aplicando este cambio de variable a ambas integrales, llegamos a que:

$$I_1 = \int \frac{-b\cos t / a\operatorname{sen}^2 t}{\sqrt{\left(b^2/\operatorname{sen}^2 t\right) - b^2}}\,dt = -\frac{1}{a}\int \frac{dt}{\operatorname{sen} t}$$

que resulta ser una integral racional de funciones trigonométricas, tratada en el capítulo 5.

$$I_2 = \int \sqrt{\left(b^2/\operatorname{sen}^2 t\right) - b^2}\ \left(-b\cos t / a\operatorname{sen}^2 t\right)\,dt = -\frac{b^2}{a}\int \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^3 t}\ dt$$

que de nuevo tiene la forma vista en el capítulo 5.
También en esta situación se puede considerar como cambio de variable:

$$ax = \frac{b}{\cos t}$$

obteniéndose resultados totalmente análogos.

c) Por último, veamos el caso en que el signo de los dos términos del polinomio sean positivos, es decir:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2 + b^2}} \qquad \text{o} \qquad I_2 = \int \sqrt{a^2x^2 + b^2}\ dx$$

En esta situación, el cambio de variable orientado a conseguir el mismo efecto que en los casos anteriores será:

$$ax = b\,\mathrm{tg}\,t$$

que, diferenciando, da lugar a:

$$a\,dx = b\left(1 + \mathrm{tg}^2 t\right)dt = \frac{b}{\cos^2 t}\,dt$$

Este cambio de variable aplicado a las dos formas en que puede aparecer la integral resulta en:

$$I_1 = \int \frac{b/a\cos^2 t}{\sqrt{b^2\mathrm{tg}^2 t + b^2}}\ \mathrm{dt} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{\cos t}$$

$$I_2 = \int \sqrt{b^2\mathrm{tg}^2 t + b^2}\ \frac{b}{a\cos^2 t}\ dt = \frac{b^2}{a}\int \frac{dt}{\cos^3 t}$$

En cualquiera de los dos casos, de nuevo llegamos a una integral de las estudiadas en el capítulo 5.

Nota

Los cambios de variable que hemos visto no son los únicos posibles para realizar en estas situaciones. Cambios análogos utilizando las funciones hiperbólicas nos llevarían a situaciones similares. También pueden aplicarse los conocidos como cambios de Euler, que consiguen llegar a la integral de una función sin raíces en ella.

Ejemplos

Volver caso a)

1) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8 - 5x^2}} = \{\sqrt{5}\,x = \sqrt{8}\,\mathrm{sen}t \ \Rightarrow\ \sqrt{5}\,dx = \sqrt{8}\cos t\,dt\} =$

$$= \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}}\int \frac{\cos t}{\sqrt{8}\cos t}\ \mathrm{dt} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ t\ + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \mathrm{arcsen}\left(\sqrt{\frac{5}{8}}x\right) + C$$

En este ejemplo hemos aplicado el cambio visto en a), debido a que el signo del coeficiente de grado 2 es negativo y el de la constante positivo.

2) $I = \int \sqrt{9-(5-x)^2}\ dx = \{\ 5-x = 3\operatorname{sen} t \quad \Rightarrow \ -dx = 3\cos t\ dt\ \} =$

$$= -\int \sqrt{9-9\operatorname{sen}^2 t}\ 3\cos t\ dt = -9\int \cos^2 t\ dt = -\frac{9}{2}\int (1+\cos 2t)\ dt =$$

$$= -\frac{9}{2}t - \frac{9}{4}\operatorname{sen} 2t + C$$

Como se tiene que $\operatorname{sen} 2t = 2\operatorname{sen} t \cos t = 2\dfrac{5-x}{3}\dfrac{1}{3}\sqrt{9-(5-x)^2}$

$$I = -\frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{5-x}{3}\right) - \frac{9}{4}\,2\,\frac{5-x}{9}\sqrt{9-(5-x)^2} + C =$$

$$= -\frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{5-x}{3}\right) - \frac{5-x}{2}\sqrt{9-(5-x)^2} + C$$

Notemos aquí que el polinomio que aparece dentro de la raíz está agrupado para que no aparezca el término de grado 1, que es la hipótesis que estamos barajando en este caso. Tal situación se generalizará en el siguiente apartado. Por lo demás, el cambio de variables elegido ha sido el propuesto en el caso a) de nuevo.

Volver caso b)

3) $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{7(9-x)^2 - 16}}$

Al igual que en el ejemplo anterior, el polinomio de grado 2 que está afectado por la raíz ya se encuentra agrupado, asociándose a la situación propuesta en el caso b), donde el coeficiente del término de grado 2 es positivo y la constante, negativa. Por lo tanto, el cambio de variable a realizar es:

$$\sqrt{7}(9-x)=\frac{4}{\operatorname{sen}t} \quad \text{Þ} \quad -\sqrt{7}\,dx=-\frac{4\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\,dt$$

con lo que obtenemos:

$$I=\frac{4}{\sqrt{7}}\int\frac{\cos t/\operatorname{sen}^2 t}{\sqrt{\left(16/\operatorname{sen}^2 t\right)-16}}\,\mathrm{dt}=\frac{1}{\sqrt{7}}\int\frac{dt}{\operatorname{sen}t}$$

Esta integral resulta ser del tipo estudiado en el capítulo 5. La función trigonométrica que aparece es impar en la variable sen$t$, por lo que realizamos un nuevo cambio de variable de la forma:

$$\cos t=u\Rightarrow\operatorname{sen}t=\sqrt{1-u^2}\quad,\quad dt=-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

Con este nuevo cambio se tiene que:

$$I=-\frac{1}{\sqrt{7}}\int\frac{du}{1-u^2}$$

Ahora, la función a integrar resulta ser una función racional de las estudiadas en el capítulo 4. Como los ceros del denominador son reales simples, aplicaremos el método de descomposición de fracciones simples. Una vez calculadas las constantes indeterminadas, obtenemos que:

$$I=-\frac{1}{\sqrt{7}}\int\frac{1/2}{1-u}\,du-\frac{1}{\sqrt{7}}\int\frac{1/2}{1+u}\,du=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{Log}|1-u|-\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{Log}|1+u|+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{Log}\left|\frac{1-u}{1+u}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{Log}\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right|+C=$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{7}} \operatorname{Log}\left| \frac{1 - \sqrt{1 - \dfrac{16}{7(9-x)^2}}}{1 + \sqrt{1 - \dfrac{16}{7(9-x)^2}}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{7}} \operatorname{Log}\left| \frac{\sqrt{7}(9-x) - \sqrt{7(9-x)^2 - 16}}{\sqrt{7}(9-x) + \sqrt{7(9-x)^2 - 16}} \right| + C$$

Este resultado puede simplificarse si racionalizamos dentro del Logaritmo, quedando:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{7}} \operatorname{Log}\left| \frac{\left(\sqrt{7}(9-x) - \sqrt{7(9-x)^2 - 16}\right)^2}{16} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{Log}\left| \sqrt{7}(9-x) - \sqrt{7(9-x)^2 - 16} \right| + C$$

En la última expresión hemos aplicado propiedades de la función Logaritmo y hemos agrupado la constante de integración C con el valor constante del Logaritmo del denominador.

Volver al Índice

6.5. Integrales irracionales de polinomios de grado dos completos

En este apartado vamos a considerar el caso más general, en el que los polinomios de grado dos que aparecen en la función a integrar afectados por una raíz cuadrada sean completos, es decir, posean término de grado uno distinto de cero. El proceso a realizar aquí será transformar la función a integrar en una del tipo estudiado en el apartado anterior, a través de algún cambio de variable.

La situación ahora será, pues, calcular integrales de funciones de la forma:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad \text{o} \qquad I_2 = \int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx$$

donde a,b,c son números reales.

El objetivo es pasar del polinomio completo de segundo grado a otro de grado dos sin término de grado uno. Para conseguir este propósito, reorganizamos el polinomio original completando cuadrados, en forma de suma o diferencia de cuadrados, de la siguiente manera:

$$ax^2+bx+c = \left(\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} \quad , \qquad \text{si } a > 0$$

Si $a < 0$, basta sacar factor común -1, para pasar a un polinomio donde el coeficiente director es positivo y aplicar la descomposición anterior. Es decir, $ax^2+bx+c = -\left(-ax^2-bx-c\right)$, donde $-a > 0$, y este último polinomio lo expresamos como:

$$-ax^2-bx-c = \left(\sqrt{-a}\,x - \frac{b}{2\sqrt{-a}}\right)^2 + \frac{b^2-4ac}{4a}$$

en definitiva, se obtiene para $a < 0$:

$$ax^2+bx+c = -\left(\sqrt{-a}\,x - \frac{b}{2\sqrt{-a}}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

En el primer caso, basta realizar el cambio de variable:

$$\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}} = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{a}}$$

y, en el segundo, el análogo:

$$\sqrt{-a}\,x - \frac{b}{2\sqrt{-a}} = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{-a}}$$

para llegar a una integral de las estudiadas en el apartado anterior. Resumiendo, si llamamos $k^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$, obtenemos alguna de las siguientes integrales, al realizar los cambio de variable señalados para cada caso. Obsérvese que omitimos las constantes que aparecerán multiplicando o dividiendo y que saldrían fuera de la integral por la propiedad de linealidad de la misma.

$$\int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} \quad , \quad \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - k^2}} \quad , \quad \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 + t^2}}$$

$$\int \sqrt{k^2 - t^2}\, dt \quad , \quad \int \sqrt{t^2 - k^2}\, dt \quad , \quad \int \sqrt{k^2 + t^2}\, dt$$

que corresponden a alguno de los casos estudiados en el apartado anterior.

Ejemplos

1) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 4x - 35}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{x^2 - x - \frac{35}{4}}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 9}} =$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{6}\right)^2 - 1}} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x - (1/2)}{3}\right)^2 - 1}}$$

Ahora, realizamos el cambio de variable $\dfrac{x - 1/2}{3} = t \Rightarrow dx = 3dt$, con lo cual la integral I queda:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

donde el término de grado uno ha desaparecido al completar los cuadrados. Esta nueva integral es del tipo estudiado en el apartado anterior. Como vimos allí, el cambio de variable a efectuar ahora es: $t=\dfrac{1}{\operatorname{sen}u}\Rightarrow dt=\dfrac{-\cos u}{\operatorname{sen}^2 u}\,du$, con lo que llegamos a que:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{-\cos u/\operatorname{sen}^2 u}{\sqrt{\left(1/\operatorname{sen}^2 u\right)-1}}\,du=-\frac{1}{2}\int\frac{\cos u/\operatorname{sen}^2 u}{\cos u/\operatorname{sen}u}\,du=-\frac{1}{2}\int\frac{du}{\operatorname{sen}u}$$

queda de la forma estudiada en el capítulo 5, como función racional de funciones trigonométricas. Como dicha función es impar en la expresión sen$u$, el cambio de variable a realizar ahora será de la forma $\cos u = z$, y, por tanto, $sen\,u=\sqrt{1-z^2}$, y $du=-\dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, con lo que I se transforma en:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{1-z^2}=\frac{1}{2}\int\frac{1/2}{1-z}\,dz+\frac{1}{2}\int\frac{1/2}{1+z}\,dz=-\frac{1}{4}\operatorname{Log}|1-z|+\frac{1}{4}\operatorname{Log}|1+z|+C$$

Nótese que la integral a la que se llega, una vez realizado este último cambio de variable, se reduce a una función racional, cociente de polinomios, estudiada en el capítulo 4. Aplicado el método de descomposición de fracciones simples, se obtiene de manera sencilla el resultado mostrado.

Por último, es necesario deshacer todos los cambios de variable efectuados durante el proceso, hasta dejar el resultado en función de la variable original x.

$$I=\frac{1}{4}\operatorname{Log}\left|\frac{1+z}{1-z}\right|+C=\frac{1}{4}\operatorname{Log}\left|\frac{1+\cos u}{1-\cos u}\right|+C=\frac{1}{4}\operatorname{Log}\left|\frac{1+\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}}{1-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{Log}\left|\frac{1+\sqrt{1-1/t^2}}{1-\sqrt{1-1/t^2}}\right|+C=\frac{1}{4}\operatorname{Log}\left|\frac{t+\sqrt{t^2-1}}{t-\sqrt{t^2-1}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|+C=\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left|\frac{x-1/2}{3}+\sqrt{\left(\frac{x-1/2}{3}\right)^2-1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left|\frac{2x-1}{6}+\sqrt{\left(\frac{2x-1}{6}\right)^2-1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left|\frac{2x-1}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{4x^2-4x-35}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left|2x-1+\sqrt{4x^2-4x-35}\right|+C$$

2) $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x+5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+\frac{5}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+\frac{3}{2}}}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3/2}}\right)^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}(x+1)\right)^2+1}}$$

Realizamos el cambio de variable $\sqrt{\frac{2}{3}}\,(x+1)=t\Rightarrow dx=\sqrt{\frac{3}{2}}\,dt$, con el que:

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1+\mathrm{tg}^2u}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2u}}\,du=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{\cos u}$$

Una vez realizado el cambio de variable, $t=\mathrm{tg}u\Rightarrow dt=\left(1+\mathrm{tg}^2u\right)du$. De nuevo llegamos a una función racional de funciones trigonométricas, que resulta ser impar en el término $\cos u$, por lo que realizamos un nuevo cambio de variable de la forma: $\mathrm{sen}u=z\Rightarrow\cos u=\sqrt{1-z^2}$, y $du=\dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{1-z^{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1/2}{1-z}\,dz+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1/2}{1+z}\,dz=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left|\frac{1+z}{1-z}\right|+C$$

Por último, deshacemos todos los cambios de variables, obteniendo:

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left|\frac{1+\operatorname{sen}u}{1-\operatorname{sen}u}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left|\frac{1+\sqrt{1-\cos^{2}u}}{1-\sqrt{1-\cos^{2}u}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left|\frac{1+\sqrt{1-\left(1/1+t^{2}\right)}}{1-\sqrt{1-\left(1/1+t^{2}\right)}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left|\frac{1+\dfrac{t}{\sqrt{1+t^{2}}}}{1-\dfrac{t}{\sqrt{1+t^{2}}}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left|\frac{\sqrt{1+t^{2}}+t}{\sqrt{1+t^{2}}-t}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left|\sqrt{1+t^{2}}+t\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left|\sqrt{\frac{2}{3}}(x+1)+\sqrt{1+\frac{2}{3}(x+1)^{2}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left|\sqrt{\frac{2}{3}}(x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{2x^{2}+4x+5}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left|\sqrt{2}\,(x+1)+\sqrt{2x^{2}+4x+5}\right|+C$$

3) $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{-2x^{2}+x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{-x^{2}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\dfrac{9}{16}-\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^{2}}}=$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{4}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{4x-1}{3}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arcsen}\left(\frac{4x-1}{3}\right)+C$$

4) $I = \int\sqrt{27-18x+9x^2}\;dx = 3\int\sqrt{x^2-2x+3}\,dx = 3\int\sqrt{(x-1)^2+2}\;dx =$

$$= 3\sqrt{2}\int\sqrt{\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\;dx$$

Hacemos el cambio de variable $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = t \Rightarrow dx = \sqrt{2}\;dt$, con lo que:

$$I = 6\int\sqrt{t^2+1}\;dt = 6\int\sqrt{1+\text{tg}^2 u}\,\left(1+\text{tg}^2 u\right)du = 6\int\frac{du}{\cos^3 u}$$

una vez realizado un nuevo cambio de variable de la forma: t = tg$u$.

La función a integrar a la que se llega es racional de funciones trigonométricas, impar en el término cos$u$, por lo que el cambio de variable a realizar ahora será: $\text{sen}\,u = z \Rightarrow \cos u = \sqrt{1-z^2}$, y $du = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$. De esta manera $I = 6\int\frac{dz}{\left(1-z^2\right)^2}$, que resulta en un cociente de polinomios, al que, según el capítulo 4, podemos aplicar el método de descomposición en fracciones simples, resultando:

$$\frac{6}{\left(1-z^2\right)^2} = \frac{A}{1-z}+\frac{B}{(1-z)^2}+\frac{C}{1+z}+\frac{D}{(1+z)^2}$$

Colocando denominador común y resolviendo el sistema lineal que nos proporciona el valor de las constantes indeterminadas, éstas toman los siguientes valores:

$$A = B = C = D = \frac{3}{2}$$

Llevando estos valores a la integral y aplicando la linealidad de la misma, se tiene que:

$$I = \frac{3}{2}\int \frac{dz}{1-z} + \frac{3}{2}\int \frac{dz}{(1-z)^2} + \frac{3}{2}\int \frac{dz}{1+z} + \frac{3}{2}\int \frac{dz}{(1+z)^2} =$$

$$= \frac{3}{2}\mathrm{Log}\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + \frac{3}{2}\frac{1}{1-z} - \frac{3}{2}\frac{1}{1+z} + C = \frac{3}{2}\mathrm{Log}\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + \frac{3z}{1-z^2} + C$$

Finalmente, deshacemos todos los cambio de variables realizados durante el proceso de integración para dar el resultado final en términos de la variable original x.

$$I = \frac{3}{2}\mathrm{Log}\left|\frac{1+\mathrm{sen}u}{1-\mathrm{sen}u}\right| + \frac{3\mathrm{sen}u}{1-\mathrm{sen}u^2} + C = \frac{3}{2}\mathrm{Log}\left|\frac{1+\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1-\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}\right| + \frac{3\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1-\dfrac{t^2}{1+t^2}} + C =$$

$$= \frac{3}{2}\mathrm{Log}\left|\frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}-t}\right| + 3t\sqrt{1+t^2} + C = 3\mathrm{Log}\left|\sqrt{1+t^2}+t\right| + 3t\sqrt{1+t^2} + C =$$

$$= 3\mathrm{Log}\left|\sqrt{1+\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{x-1}{\sqrt{2}}\right| + 3\frac{x-1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2} + C =$$

$$= 3\mathrm{Log}\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right| + 3\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+3} + C$$

Volver al Índice

6.6. Integrales irracionales compuestas

Veremos en este apartado algunas integrales de funciones compuestas por la raíz cuadrada de un polinomio completo de grado dos, acompañada de algún otro polinomio colocado en la función de manera particular. En concreto, vamos a estudiar dos casos particulares:

a) $I = \int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

donde a,b,c son números reales y $P(x)$ es un polinomio de grado cualquiera. El objetivo es encontrar una descomposición de esta función a través de la cual el problema se reduzca a calcular la integral de alguna función estudiada anteriormente. En este caso, utilizaremos la siguiente relación cuya demostración omitimos:

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \left(Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\right)' + \frac{m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

donde $Q(x)$ es un polinomio de coeficientes indeterminados de grado conocido como *grado* $Q(x)$ = *grado* $P(x) - 1$, y m es un número real constante también a determinar. Los coeficientes indeterminados de $Q(x)$ y el valor de m se determinarán a través de los métodos de coeficientes indeterminados que se vieron para el caso de la descomposición de funciones racionales.

Ejemplo

$$I = \int \frac{x^2-3x+7}{\sqrt{2x^2+4x+5}}\,dx$$

$$\frac{x^2-3x+7}{\sqrt{2x^2+4x+5}} = \left[(ax+b)\sqrt{2x^2+4x+5}\right]' + \frac{m}{\sqrt{2x^2+4x+5}} =$$

$$= a\sqrt{2x^2+4x+5} + \frac{(ax+b)(2x+2)}{\sqrt{2x^2+4x+5}} + \frac{m}{\sqrt{2x^2+4x+5}}$$

Colocando denominador común e igualando los numeradores que resultan, llegamos a que:

$$x^2 - 3x + 7 = 2ax^2 + 4ax + 5a + 2ax^2 + 2ax + 2bx + 2b + m$$

Igualando los coeficientes de los términos del mismo grado, obtenemos el siguiente sistema lineal, que nos dará el valor de las constantes indeterminadas:

$$\begin{array}{ll} x^2: & 1 = 4a \\ x: & -3 = 6a + 2b \\ 1: & 7 = 5a + 2b + m \end{array}$$

cuya solución única resulta ser: $a = \dfrac{1}{4}$, $b = \dfrac{-9}{4}$, $m = \dfrac{41}{4}$

Por tanto, tenemos:

$$I = \frac{x-9}{4}\sqrt{2x^2+4x+5} + \frac{41}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x+5}}$$

Llegamos así a una integral del tipo estudiado en el apartado anterior:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2+1}} = \left\{ \frac{\sqrt{2}x+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = t \Rightarrow dx = \sqrt{\frac{3}{2}}dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Log}\left|\sqrt{1+t^2}+t\right| + C$$

Notamos que este resultado se obtuvo en el ejemplo 2 del apartado anterior. Por tanto,

$$I = \frac{x-9}{4}\sqrt{2x^2+4x+5} + \frac{41}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{Log}\left|\sqrt{\frac{2}{3}}(x+1)+\sqrt{1+\frac{2}{3}(x+1)^2}\right| + C =$$

$$= \frac{x-9}{4}\sqrt{2x^2+4x+5} + \frac{41}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{Log}\left|\sqrt{2}(x+1)+\sqrt{2x^2+4x+5}\right| + C$$

b) En este caso, vamos a estudiar integrales de la forma

$$I = \int \frac{dx}{(Ax+B)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

con A,B,a,b,c números reales y n natural. En esta situación, el cambio de variables que aplicaremos para conducir la integral original o bien a una del caso a) que acabamos de ver, o bien a una de las estudiadas en el apartado anterior, es de la forma:

$$AX + B = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = \frac{1}{A}\frac{-dt}{t^2}$$

Ejemplo

$$I = \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+3x-1}}$$

Identificando esta función a integrar con la función general dada, obtenemos que $A = 1$, $B = 0$, $n = 3$, por lo que el cambio de variable a realizar queda de la forma: $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$, y así

$I = \int \frac{\frac{-dt}{t^2}t^3}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{3}{t}-1}} = -\int \frac{t^2}{\sqrt{-t^2+3t+1}}\,\mathrm{dt}$, que se clasifica en el tipo de integrales estudiadas en el caso a) anterior. Procedemos a su descomposición:

$$\frac{t^2}{\sqrt{-t^2+3t+1}} = \frac{d}{dt}\left[(at+b)\sqrt{-t^2+3t+1}\right] + \frac{m}{\sqrt{-t^2+3t+1}}$$

$$\frac{t^2}{\sqrt{-t^2+3t+1}} = a\sqrt{-t^2+3t+1} + (at+b)\frac{-2t+3}{2\sqrt{-t^2+3t+1}} + \frac{m}{\sqrt{-t^2+3t+1}}$$

$$2t^2 = 2a\left(-t^2+3t+1\right) + (at+b)(-2t+3) + 2m$$

Igualando los coeficientes de los términos del mismo grado:

t^2 : $2 = -4a$
t: $0 = 9a - 2b$
1: $0 = 2a + 3b + 2m$

cuya solución única es:

$$a = \frac{-1}{2} \ , \ \mathrm{b} = \frac{-9}{4} \ , \ m = \frac{31}{8}$$

con lo cual:

$$I = \left(\frac{2t+9}{4}\right)\sqrt{-t^2+3t+1} - \frac{31}{8}\int \frac{dt}{\sqrt{-t^2+3t+1}}$$

$$I_1 = \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{13}{4} - \left(t - \frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}\int \frac{dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{2t-1}{\sqrt{13}}\right)^2}} = \mathrm{arcsen}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{13}}\right) + C$$

Con lo cual, tenemos que:

$$I = \left(\frac{2t+9}{4}\right)\sqrt{-t^2+3t+1} - \frac{31}{8}\mathrm{arcsen}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{13}}\right) + C$$

Finalmente, deshaciendo el cambio de variable, llegamos a que:

$$I = \left(\frac{9x+2}{4x}\right)\sqrt{\frac{-1}{x^2}+\frac{3}{x}+1} - \frac{31}{8}\operatorname{arcsen}\left(\frac{2-3x}{\sqrt{13}x}\right) + C =$$

$$= \left(\frac{9x+2}{4x}\right)\frac{\sqrt{x^2+3x-1}}{x} - \frac{31}{8}\operatorname{arcsen}\left(\frac{2-3x}{\sqrt{13}x}\right) + C$$