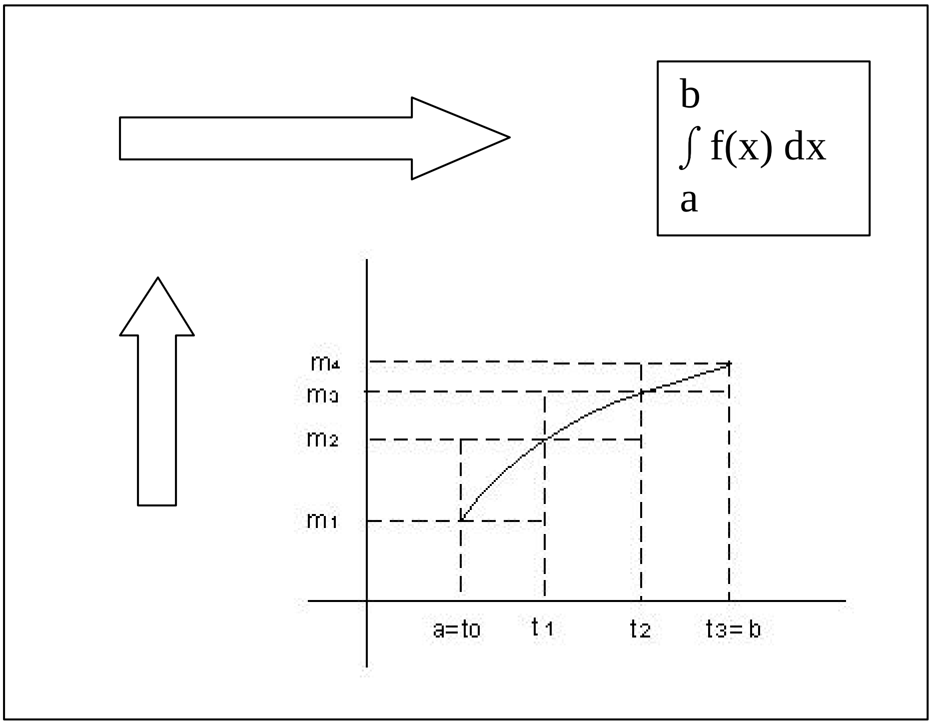
CAPÍTULO 7. INTEGRAL DEFINIDA

Capítulo 7
Integral definida



Capítulo 7
Integral definida

Volver al Índice

7.1. Introducción

Si $y = f(x)$ es una función definida en el intervalo $[a,b]$ y el límite de la suma de Riemann existe, entonces decimos que $f(x)$ es una función integrable en $[a,b]$ y denotamos ese límite mediante:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

Llamamos *integral definida* de la función $y = f(x)$ entre a y b a este límite. Al número a se le llama *límite inferior de integración* y al número b, *límite superior de integración*.

7.2. Teorema de integrabilidad

Volver al Índice

Si $y = f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ $\Rightarrow$ $f(x)$ es integrable en $[a,b]$. Además, el valor de la integral definida es un número real.

7.3. El área como una integral definida

Si $y = f(x)$ es una función continua y no negativa en el intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ $\Rightarrow$ el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, el eje OX, y las rectas verticales $x = a$, $x = b$ viene dada por el número real:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Volver al Índice

7.4. Propiedades

1) Si $y = f(x)$ está definida en $x = a$ $\Rightarrow$ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2) Si $y = f(x)$ es integrable en $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3) Si $y = f(x)$ es integrable en $[a,b]$ y $c \in (a,b)$ con $y = f(x)$ integrable en $[a,c]$ y $[c,b] \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

4) Si $y = f(x)$, $y = g(x)$ son integrables en $[a,b]$ y k es una constante real $\Rightarrow$

$$\int_a^b k\, f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

5) Propiedad de *monotonía* de la integral:
Si $y = f(x)$, $y = g(x)$ son funciones integrables en $[a,b]$ tales que cumplen que $f(x) \leq g(x)$ $\forall\, x \in [a,b] \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Volver al Índice

7.5. Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Hay una estrecha relación entre el cálculo diferencial y el cálculo integral. Esta relación fue descubierta, independientemente, por Newton y Leibniz, y por esta razón se les atribuye a ambos el descubrimiento del cálculo integral.

Teorema

Si una función $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, donde $F(x)$ es cualquier función tal que $F'(x) = f(x)$ $\forall\, x \in [a,b]$.

Este resultado se conoce también como *Regla de Barrow*.

Ejemplos

1) $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2-3\right)dx = \left[\frac{x^3}{3}-3x\right]_1^2 = \frac{8}{3} - 6 - \frac{1}{3} + 3 = -\frac{2}{3}$

2) $\displaystyle\int_0^1 (4x+1)^2\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{(4x+1)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left(\frac{125}{3}-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}\frac{124}{3} = \frac{31}{3}$

3) $\displaystyle\int_0^{\pi/8} \sec^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\,[\operatorname{tg}2x]_0^{\pi/8} = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$

4) Evaluar: $\displaystyle\int_0^2 |\,2x-1\,|\,dx$

Hay que tener en cuenta que $\quad |2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & si \quad x \geq 1/2 \\ 1-2x & si \quad x < 1/2 \end{cases}$

$$\int_0^2 |\,2x-1\,|\,dx = \int_0^{1/2}(1-2x)\,dx + \int_{1/2}^2 (2x-1)\,dx =$$

$$= \left[-x^2+x\right]_0^{1/2} + \left[x^2-x\right]_{1/2}^2 =$$

$$= \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) + (4-2) - \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

5) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de ecuación $y = 2x^2-3x+2$, el eje OX y las rectas verticales $x = 0$, $x = 2$.

$$\text{Área} = \int_0^2 \left(2x^2-3x+2\right)dx = \left[\frac{2x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_0^2 = \frac{16}{3} - \frac{12}{2} + 4 = \frac{10}{3}$$

Volver al Índice

7.6. Cambios de variable para integrales definidas

Si la función $u = g(x)$ tiene derivada continua en $[a,b]$ y existe la integral indefinida sobre el recorrido de $g(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

donde el cambio de variable afecta también a los límites de integración, que tomarán ahora valores en la nueva variable de integración.

Ejemplos

1) Calcular: $I = \int_0^1 x\left(x^2+1\right)^3 dx$

Si realizamos el cambio de variable $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x\, dx$
Esto nos lleva a cambiar también los valores de los límites de integración de la siguiente manera:

si $x = 1 \Rightarrow u = 2$
si $x = 0$ Þ $u = 1$

Por tanto, al realizar este cambio de variable, llegamos a:

$$I = \frac{1}{2}\int_1^2 u^3 du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}$$

2) Evaluar: $I = \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\, dx$

Realizamos el cambio de variable: $u^2 = 2x - 1 \Rightarrow 2u\, du = 2dx$

Despejando, $x = \dfrac{u^2+1}{2}$

Cambiamos los índices de integración:

si $x = 5 \Rightarrow u = 3$
si $x = 1 \Rightarrow u = 1$

Por tanto,

$$I = \int_1^3 \frac{\left(u^2+1\right)/2}{u}\, u\, du = \frac{1}{2}\int_1^3 \left(u^2+1\right) du =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3} + u\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left[9 + 3 - \frac{1}{3} - 1\right] = \frac{16}{3}$$

3) Calcular: $I = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\ dx$

Cambio de variable: $x = r\operatorname{sen} t \Rightarrow dx = r\cos t\ dt$
Cambio de límites de integración:

$$\text{si} \qquad x = r \ \Rightarrow\ t = \frac{\pi}{2}$$
$$\text{si} \qquad x = 0 \ \Rightarrow\ t = 0$$

Así,

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2\operatorname{sen} t}\ \cos t\ dt = r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\ \ dt = \frac{r^2}{2}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\ dt =$$

$$= \frac{r^2}{2}\left[t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{r^2}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi r^2}{4}$$