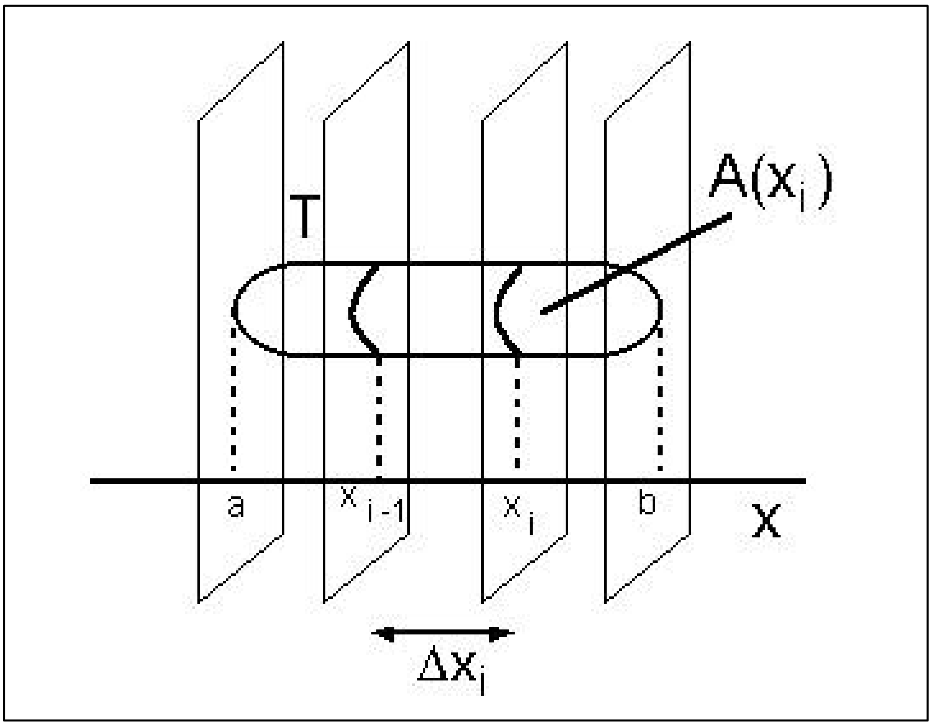
CAPÍTULO 8. APLICACIONES GEOMÉTRICAS Y MECÁNICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Capítulo 8
Aplicaciones geométricas y mecánicas de la integral definida



Capítulo 8
Aplicaciones geométricas y mecánicas de la integral definida

Volver al Índice

8.1. Cálculo de áreas en coordenadas cartesianas

En esta sección vamos a tratar de calcular el área de figuras planas limitadas por funciones continuas expresadas en coordenadas cartesianas a través del cálculo de ciertas integrales definidas. Distinguiremos varios casos, de menor a mayor complejidad, hasta llegar a la situación más general.

a) Si la función $y = f(x)$ está definida y es continua en el intervalo $[a,b]$, verificando que $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$, entonces, como ya sabemos, el área del trapecio curvilíneo limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x = a$, $x = b$ es igual a:

$$\text{A} = \int_a^b f(x)\,dx$$

b) Si la función $y = f(x)$ está definida y es continua en el intervalo $[a,b]$, verificando que $f(x) \leq 0 \ \forall x \in [a,b]$, entonces el área del trapecio curvilíneo limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x = a$, $x = b$ es igual a:

$$\text{A} = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Notemos que en esta situación, debido a que $f(x)$ es no positiva en el intervalo de integración, el valor del área es no negativo, por la propiedad de monotonía de la integral.

c) Si $y = f(x)$ está definida y es continua en el intervalo $[a,b]$ y cambia de signo un número finito de veces en el segmento $[a,b]$, entonces podemos descomponer la integral a lo largo del intervalo $[a,b]$ en suma de integrales a lo largo de tantos subintervalos como sea necesario para asegurar que en cada uno de ellos la función permanece con signo constante. El valor de la integral definida será positiva en los subintervalos donde $f(x) \geq 0$, y negativa en aquellos donde $f(x) \leq 0$. Así, el área del trapecio curvilíneo limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x = a$, $x = b$ se calculará como suma de integrales definidas de la forma vista en los casos anteriores a) o b), según el signo constante que posea la función en cada subintervalo concreto. Esta situación puede resumirse en la siguiente fórmula general, que engloba a los casos anteriores como particulares:

$$\text{A} = \int_a^b \left| f(x) \right| dx$$

d) Si se desea calcular el área de la región limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, continuas en el intervalo $[a,b]$, y las rectas verticales $x = a$, $x = b$, primero se calcularán todos los puntos en que se cortan las dos funciones $f(x)$, $g(x)$ dentro del intervalo $[a,b]$. Entonces, en cada uno de los subintervalos determinados por esos puntos de intersección se comprueba qué gráfica se encuentra por encima de la otra y se aplica en cada uno de ellos la fórmula:

$$\text{A} = \int_i^j \left(\text{curva que va por arriba} - \text{curva que va por debajo}\right) dx$$

Este caso es el más general, y todos los anteriores se pueden ver como situaciones particulares de él. La fórmula, escrita en términos de las funciones, quedaría como:

$$\text{A} = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$$

Nota

A veces es interesante cambiar los papeles de las variables x e y. Con un estudio similar, el caso general d), podría escribirse en esta situación como:

$$\text{A} = \int_i^j \left(\text{curva de la derecha} - \text{curva de la izquierda}\right) dy$$

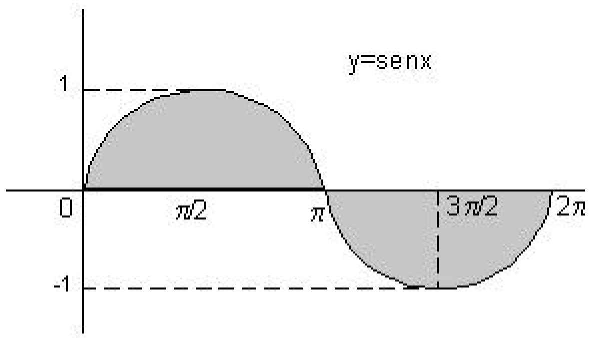
donde ahora la integración se realizará con respecto a la variable y, siendo, por lo tanto, los valores de los límites de integración valores de esta variable.

Siempre que se pueda es recomendable realizar el dibujo de la gráfica, lo que nos servirá en la mayoría de los casos para decidir la integración que nos interese, bien respecto a la variable x, bien respecto a la y.

Ejemplos

1) Calcular el área de la región limitada por la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ y el eje OX, cuando $0 \leq x \leq 2p$

Solución:

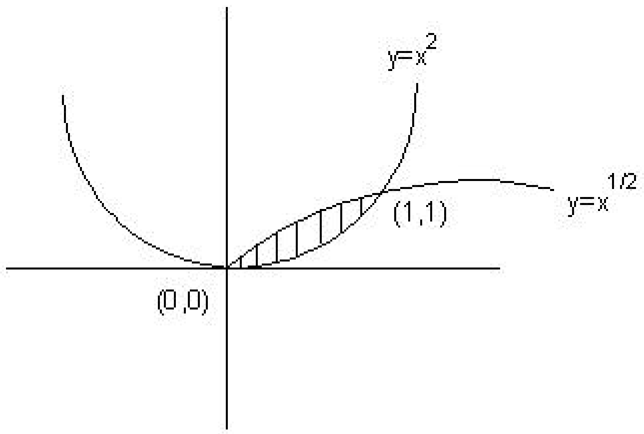


Puesto que sen$x$ ≥ 0 para $0 \leq x \leq p$, y sen$x \leq 0$ para $p \leq x \leq 2p$, es necesario calcular el área como la suma de dos integrales definidas, según dichos intervalos. Es decir:

$$A = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} + \left[\cos x\right]_{\pi}^{2\pi} = -(-1-1)+(1+1) = 4$$

2) Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$

Solución:



Resolviendo el sistema formado por: $y^2 = x$, $y = x^2$, obtenemos los puntos de corte (0,0), (1,1). Además, $y = \sqrt{x}$ va por encima de $y = x^2$ para valores de x en el intervalo (0,1). Por tanto:

$$A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Volver al Índice

8.2. Cálculo del área en coordenadas paramétricas

Calculemos el área de un trapecio curvilíneo limitado por una curva dada por sus ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, cuando $a \le x \le b$, de modo que el parámetro t varíe entre $\alpha \le t \le \beta$, con $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Supongamos que las ecuaciones paramétricas definen una función $y = f(x)$ en el intervalo $[a,b]$. Por tanto, el área del trapecio curvilíneo limitado por esta función, el eje OX, y las rectas verticales $x = a$, $x = b$, puede ser calculada según la fórmula:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx$$

Para calcular el valor de esta integral definida, aprovechamos las ecuaciones paramétricas para realizar el cambio de variable dado por ellas, es decir, $x = \varphi(t)$, de donde $dx = \varphi'(t)dt$. Así pues, llevando este cambio de variable a la integral definida que nos proporcionará el valor del área y recordando que $y = f(x) = f[\varphi(t)] = \psi(t)$, de las ecuaciones paramétricas, llegamos a:

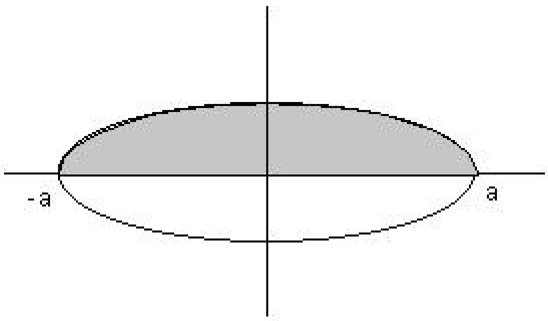
$$A = \int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt$$

Ésta es la fórmula para calcular el área de un trapecio curvilíneo limitado por una curva dada en coordenadas paramétricas.

Ejemplos

1) Calcular el área del dominio limitado por la elipse, cuyas ecuaciones paramétricas vienen dadas por: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$

   Solución:



Calcularemos sólo el área de la mitad superior de la elipse y la duplicaremos, debido a la simetría existente. Este hecho se utilizará mucho a lo largo del presente capítulo. Como la variable x varía desde $-a$ hasta a, el parámetro t

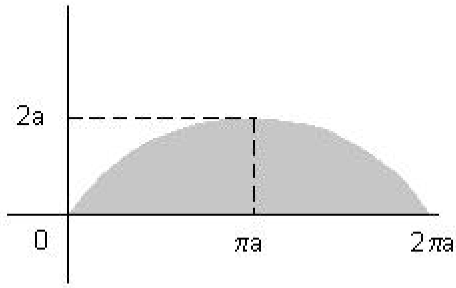
varía desde π hasta 0, respectivamente. Por tanto, la integral definida que nos dará el valor del área buscada será:

$$A = 2\int_{\pi}^{0}(b\,\mathrm{sen}\,t)(-a\,\mathrm{sen}\,t)\,dt = -2ab\int_{\pi}^{0}\mathrm{sen}^2 t\,dt = 2ab\int_{0}^{\pi}\mathrm{sen}^2 t\,dt =$$

$$= 2ab\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = 2ab\left[\frac{t}{2}-\frac{\mathrm{sen}\,2t}{4}\right]_0^{\pi} = 2ab\,\frac{\pi}{2} = \pi ab$$

2) Calcular el área de la región limitada por el eje OX y un arco de la cicloide cuyas ecuaciones paramétricas vienen dadas por: $\begin{cases} x = a(t-\mathrm{sen}\,t) \\ y = a(1-\cos t)\end{cases}$

Solución:



Puesto que x varía desde 0 hasta $2\pi a$, t variará desde 0 hasta 2π. Así, la integral definida que nos proporcionará el valor del área, una vez realizado el cambio de variable dado por las ecuaciones paramétricas, viene expresada por:

$$A = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt =$$

$$= a^2\left[\int_0^{2\pi}dt - 2\int_0^{2\pi}\cos t\,dt + \int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt\right] = a^2\left[t-2\,\mathrm{sen}\,t\right]_0^{2\pi} +$$

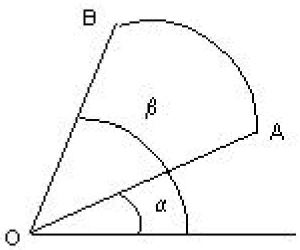
$$+a^2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = a^2 2\pi + a^2\left[\frac{t}{2}+\frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3\pi a^2$$

Volver al Índice

8.3. Cálculo del área en coordenadas polares

Sea $\rho = f(\theta)$ la ecuación de una curva en coordenadas polares, donde $f(\theta)$ es una función continua para $\alpha \le \theta \le \beta$. Determinemos el área del sector *OAB*, limitado por la curva $\rho = f(\theta)$ y los radios vectores $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$.



Siguiendo un proceso similar al realizado en el capítulo 1, dividimos la región de la cual queremos calcular el valor del área en n partes mediante los radios vectores $\alpha = \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n = \beta$, formando de esta manera las particiones que resultaban allí.

Designemos por $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \ldots, \Delta\theta_n$ los ángulos formados por estos radios vectores; y sea ρ_i la longitud de un radio vector correspondiente a un ángulo α_i cualquiera, comprendido entre θ_{i-1}, θ_i. Consideremos el sector circular de radio ρ_i y ángulo central $\Delta\theta_i$. El área de este sector es igual a:

$$A_i = \frac{1}{2}\rho_i^2\,\Delta\theta_i$$

y será una aproximación numérica del valor del área del mismo sector determinado por la función $\rho = f(\theta)$.

Si repetimos este proceso de aproximación para todos los sectores en que hemos dividido el sector original *OAB*, obtenemos una aproximación del área total, sin más que sumar todas estas aproximaciones parciales:

$$A_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho_i^2\Delta\theta_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f^2(\alpha_i)\Delta\theta_i$$

Puesto que la suma indicada es una suma correspondiente a la función $\rho^2 = f^2(\theta)$ en el intervalo $\alpha \leq \theta \leq \beta$, su límite cuando $máx\,\Delta\theta_i \to 0$ y, por tanto, el valor del área buscada será la integral definida:

$$\text{A} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\theta$$

Nota

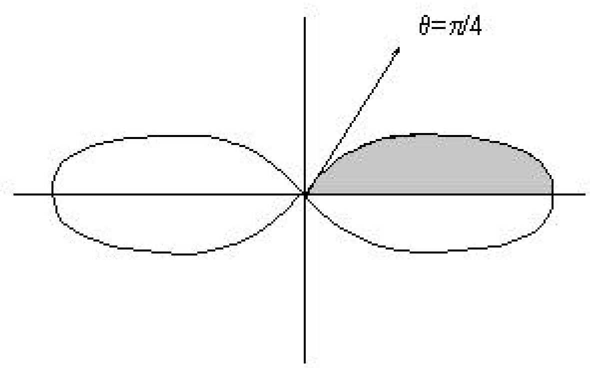
Calculando el área del sector curvilíneo mediante trapecios curvilíneos, obtendríamos el mismo resultado.

Así, el área del sector *OAB* será igual a: $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\theta$

Ejemplos

1) Calcular el área encerrada por la lemniscata $\rho = a\sqrt{cos\,2\theta}$.

Solución:



Como recomendamos anteriormente, realizamos un dibujo de la función, para determinar visualmente la región de la cual queremos calcular el área. Los valores de θ variarán en los intervalos [0,π/4], y [3π/4,π], donde la función cos2θ es no negativa. Además, como la función cos2θ es simétrica respecto al ángulo ($\cos 2\theta = \cos(-2\theta)$), la gráfica debe presentar dicha simetría. Daremos valores al ángulo dentro de su dominio, donde, además, la función es continua, quedando su representación como se ve en la figura.

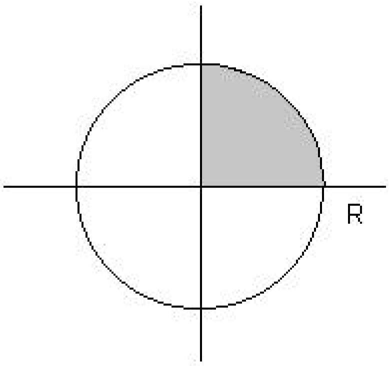
A la vista de la gráfica de la función, basta con calcular el área de la cuarta parte que se encuentra en el primer cuadrante y multiplicarla por cuatro. En esa cuarta parte, el ángulo θ varía desde 0 hasta $\pi/4$, y, por consiguiente,

$$\frac{1}{4}\mathrm{A} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2}a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta \, d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{4}$$

por tanto, $A = a^2$

2) Calcular el área del círculo cuya ecuación en coordenadas polares es: $\rho = R$.

Solución:



Esta función es continua para cualquier valor del ángulo; por tanto, θ variará en el intervalo $[0,2p]$. En vista de la gráfica, aplicando simetrías,

$$\mathrm{A} = 4\,\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} R^2 dt = 2R^2\,[t]_0^{\pi/2} = p\,R^2$$

Volver al Índice

8.4. Cálculo del valor medio de una función

Sea $y = f(x)$ una función definida y continua en el intervalo $[a,b]$. Designamos por m el valor más pequeño que toma $f(x)$ cuando x recorre el intervalo $[a,b]$. Análogamente, sea M el valor más grande. En estas condiciones $m \le f(x) \le M$, para todo x en el intervalo $[a,b]$. Dividimos $[a,b]$ en subintervalos, es decir, generamos una partición del mismo a través de los siguientes valores, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ obteniendo las desigualdades:

$$\begin{cases} m(x_1 - a) \le (x_1 - a) f(c_0) \le M(x_1 - a) & a \le c_0 \le x_1 \\ m(x_2 - x_1) \le (x_2 - x_1) f(c_1) \le M(x_2 - x_1) & x_1 \le c_1 \le x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ m(b - x_{n-1}) \le (b - x_{n-1}) f(c_{n-1}) \le M(b - x_{n-1}) & x_{n-1} \le c_{n-1} \le b \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro:

$$m(b-a) \le \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(c_{i-1}) \le M(b-a)$$

Cuando $n \to \infty$, se demuestra que la serie tiende a la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$. Así, haciendo el límite en las tres partes de la desigualdad:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

Estas desigualdades muestran que el valor de la integral definida es el producto de $b - a$, longitud del intervalo de integración, por un número N comprendido entre m y M, de donde:

$$\int_a^b f(x)\,dx = N(b-a)$$

Como la función $y = f(x)$ es continua en $[a,b]$, existe al menos un valor c de la variable x tal que $N = f(c)$. Se tiene así:

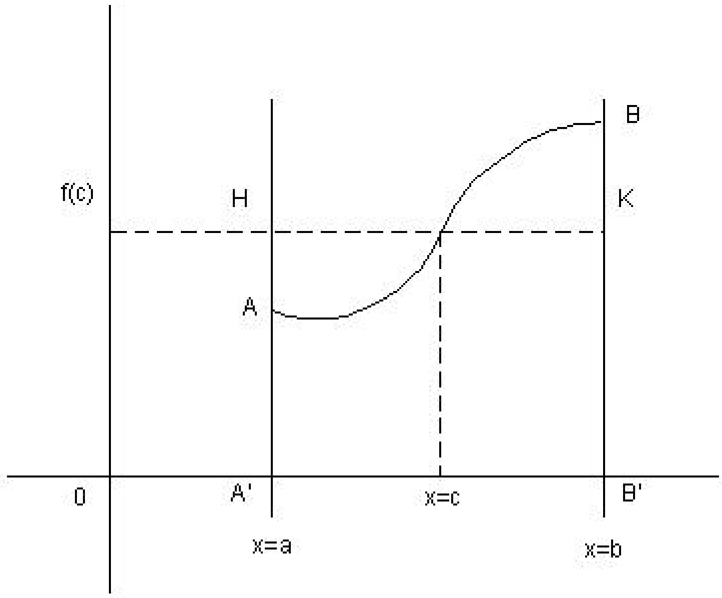
$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)$$

Volver al Índice

8.4.1. Interpretación geométrica

Supongamos la función $y = f(x)$ continua en el intervalo $[a,b]$, de modo que, como hemos visto anteriormente, la integral definida $I = \int_a^b f(x)\,dx$ representa el área limitada por la gráfica de la función, el eje OX, y las rectas verticales $x = a$, $x = b$, si suponemos, sin pérdida de generalidad, que la función es no negativa a lo largo de todo el intervalo.

Por ejemplo:



En este caso, el resultado anterior nos dice que $f(c)$ es la altura del rectángulo $HA'B'K$ de base $A'B' = b - a$ y de área igual a I.

Volver al Índice

8.4.2. Valor medio de una función

El valor anterior $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, recibe el nombre de *valor medio* de la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$. Dicha notación se justifica viendo que esta fórmula del valor medio de una función no es más que una generalización de la noción de media aritmética. Para ello, descomponemos una vez más el intervalo $[a,b]$ a través de una partición, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, y consideramos la siguiente suma finita:

$$U_n = \frac{b-a}{n}\left[f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(b)\right]$$

como $U_n \to I$ cuando $n \to \infty$, se deduce que:

$$\frac{1}{n}\left[f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(b)\right] \to \frac{I}{b-a} = f(c), \text{ cuando } n \to \infty$$

El valor medio de una función aparece como el límite de la media aritmética de $f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n-1$.

Nota

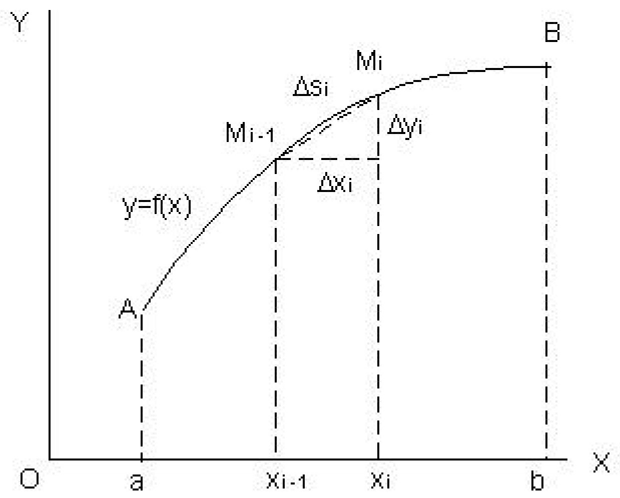
El valor medio de una función puede ser positivo o negativo. Si $b - a > 0$, el signo de $f(c)$ es el mismo que el de $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. El valor medio de una función puede ser nulo si la integral definida I es nula.

Volver al Índice

8.5. Cálculo de la longitud de curva en coordenadas cartesianas

Sea $y = f(x)$ la ecuación de una curva plana en coordenadas cartesianas. Busquemos la longitud del arco AB de esta curva, comprendida entre las rectas verticales $x = a$, $x = b$. Para ello, como hemos realizado anteriormente, construiremos una partición del intervalo $[a,b]$, encontraremos una aproximación a la longitud de la curva en cada uno de los subintervalos que proporciona la partición, sumaremos todas esas aproximaciones para obtener una aproximación a la longitud completa buscada y, finalmente, pasaremos al límite cuando la longitud del mayor subintervalo de la partición tiende a cero, para encontrar la fórmula que nos permita calcular la longitud de un arco de curva a través del cálculo de alguna integral definida determinada.

Comenzaremos, como siempre, realizando un dibujo de la función, que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, no negativa en todo el intervalo $[a,b]$.



Generamos la partición del intervalo $[a,b]$ tomando sobre el arco AB los puntos A, M_1, M_2, ... , M_i, ... ,M_{n-1}, B, cuyas abscisas son, respectivamente, $a = x_0$, x_1, ... , x_i, ... , x_{n-1}, $x_n = b$.

Tracemos las cuerdas AM_1, $M_1 M_2$, ... , $M_{n-1}B$, cuyas longitudes designaremos por $\Delta S_1, \Delta S_2$, ... ,ΔS_n, respectivamente. Obtenemos así una línea poligonal $AM_1 M_2 \ldots M_{n-1} B$ inscrita en el arco AB. La longitud de esa poligonal que será una aproximación a la longitud del arco de curva buscada es igual a: $S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$.

El límite al cual tiende la longitud de la poligonal inscrita, cuando la longitud de su lado mayor tiende a cero, se llama *longitud del arco AB*, y es el valor que buscamos, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \to S \text{ , cuando } \text{máx } \Delta S_i \to 0$$

Veremos ahora que, si la función $f(x)$ y su derivada $f'(x)$ son continuas en el intervalo $a \leq x \leq b$, este límite existe y obtendremos la fórmula que nos permitirá calcular la longitud de curva. Para ello, introduzcamos la siguiente notación:

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

$$\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}}$$

Ahora aplicamos el teorema de Lagrange o teorema del valor medio para derivadas:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i), \text{ donde } \quad x_{i-1} < c_i < x_i$$

Por tanto,

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \; \Delta x_i$$

De este modo la longitud de la poligonal inscrita es:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \; \Delta x_i$$

Como por hipótesis la función $f'(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$, la función $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ también será continua en el mismo intervalo. En consecuencia, la suma integral escrita tiene límite cuando el máximo de los valores de Δx_i tienda hacia cero. Este límite será la integral definida:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$$

Así, hemos obtenido la fórmula para calcular la longitud de un arco de curva:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}}\ dx$$

Volver al Índice

8.5.1. Diferencial de un arco de curva

Partiendo de la fórmula anterior, se puede obtener la derivada de la longitud del arco respecto a la abscisa. Considerando que el límite superior de integración es variable y designándolo por x (sin cambiar la variable de integración), obtenemos la longitud del arco S en función de x:

$$S(x) = \int_a^x \sqrt{1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}}\ dx$$

Derivando esta integral respecto del límite superior de integración:

$$\frac{dS}{dx} = \sqrt{1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}} \Rightarrow (dS)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \Rightarrow dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Volver al Índice

8.5.2. Comparación del arco y de su cuerda

Consideramos sobre el arco AB de la figura anterior dos puntos M, N. Nos proponemos comparar la longitud del arco, S, y de su cuerda, C, cuando se hace tender N hacia M. Las componentes del vector MN (como cuerda) sobre los ejes son $(\Delta x\ ,\ \Delta y) \Rightarrow\ C^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$.

Si x_0 es la abscisa de M $\Rightarrow$ el arco AM = $S(x_0)$, y el arco AN = S(x), de donde se deduce que la longitud del arco MN es: $S = S(x) - S(x_0) = \Delta S$. Así, el cociente entre el cuadrado de la longitud del arco y el de la longitud de la cuerda será:

$$R = \frac{(\Delta S)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \frac{(\Delta S)^2}{(\Delta x)^2} \frac{1}{1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}}$$

Además, cuando $\Delta x \to 0$, se tiene que $\frac{\Delta S}{\Delta x} \to \frac{dS}{dx}$, y en las mismas condiciones $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'$. Con todo esto:

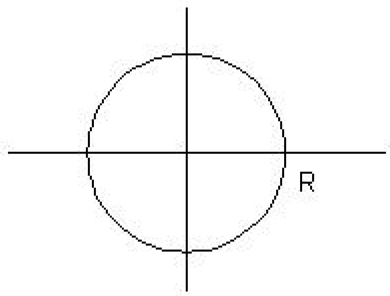
$$R \to \frac{[S'(x)]^2}{1 + y'^2} = 1$$

como queríamos demostrar.

Ejemplos

1) Calcular la longitud de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$.

Solución:



$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow \quad ds = \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\ dx$$

La longitud total se obtiene, por simetría, calculando la longitud del trozo de circunferencia que se encuentra en el primer cuadrante, cuando x varía entre 0 y R, y multiplicándola por 4. Es decir,

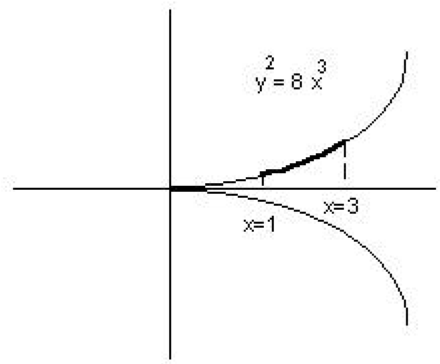
$$L = 4\int_0^R \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx = 4\int_0^R \sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}\,dx = 4\int_0^R \sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}\,dx =$$

$$= 4R\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}} = \{x = R\,\mathrm{sen}t \Rightarrow dx = R\cos t\,dt\} =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \frac{R\cos t}{\sqrt{R^2-R^2\mathrm{sen}^2 t}}\,dt = 4R\int_0^{\pi/2} \frac{R\cos t}{R\cos t}\,dt = 4R\,\frac{\pi}{2} = 2\pi R$$

2) Encontrar la longitud del arco de curva cuya ecuación es $y^2 = 8x^3$, correspondiente al intervalo $1 \le x \le 3$.

Solución:



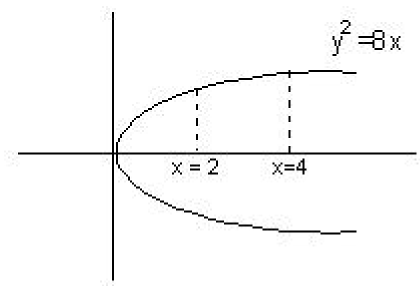
$$y = 2\sqrt{2}\ x^{3/2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3\sqrt{2}\ x^{1/2}$$

$$L = \int_1^3 \sqrt{1+18x}\, dx = \frac{1}{18}\int_1^3 18(1+18x)^{1/2}\, dx = \frac{1}{18}\frac{2}{3}\left[(1+18x)^{3/2}\right]_1^3 =$$

$$= \frac{1}{27}\left[\sqrt{55^3} - \sqrt{19^3}\right] = 12{,}03969766$$

3) Encontrar la longitud del arco de curva cuya ecuación es $y^2 = 8x$, correspondiente al intervalo $2 \leq x \leq 4$.

Solución:



$$y = \sqrt{8x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{8}{2\sqrt{8x}} = \frac{4}{\sqrt{8x}}$$

$$L = \int_2^4 \sqrt{1+\frac{16}{8x}}\, dx = \int_2^4 \sqrt{1+\frac{2}{x}}\, dx$$

Realizamos el cambio de variable:

$$1+\frac{2}{x}=t^2 \Rightarrow x=\frac{2}{t^2-1} \Rightarrow dx=\frac{-4t}{\left(t^2-1\right)^2}dt$$

Con este cambio, los valores que toma la nueva variable de integración son:

$$x=4 \Rightarrow t=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad , \quad x=2 \Rightarrow t=\sqrt{2}$$

Por tanto,

$$L=-4\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3/2}} \frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^2}\,dt = 4\int_{\sqrt{3/2}}^{\sqrt{2}} \frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^2}\,dt$$

que resulta ser un cociente de polinomios. Utilizamos, pues, el método de descomposición en fracciones simples, debido a la naturaleza de los ceros del denominador:

$$\frac{4t^2}{\left(t^2-1\right)^2}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{(t-1)^2}+\frac{C}{t+1}+\frac{D}{(t+1)^2}$$

poniendo denominador común:

$$4t^2 = A(t-1)(t+1)^2 + B(t+1)^2 + C(t+1)(t-1)^2 + D(t-1)^2$$

Damos ahora valores a la variable t:

$t=1$	$\Rightarrow$	$4=4B$	$\Rightarrow$	$B=1$
$t=-1$	$\Rightarrow$	$4=4D$	$\Rightarrow$	$D=1$
$t=0$	$\Rightarrow$	$0=-A+B+C+D$	$\Rightarrow$	$C-A=-2$
$t=2$	$\Rightarrow$	$16=9A+9B+3C+D$	$\Rightarrow$	$C+3A=2$

Resolviendo, resulta que: $A=1$, $B=1$, $C=-1$, $D=1$, con lo cual:

$$L = \int_{\sqrt{3/2}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t-1} + \int_{\sqrt{3/2}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{(t-1)^2} - \int_{\sqrt{3/2}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t+1} + \int_{\sqrt{3/2}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{(t+1)^2} =$$

$$= \left[-\mathrm{Log}\left|t^2-1\right| - \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right]_{\sqrt{3/2}}^{\sqrt{2}} = \left[-\mathrm{Log}\left|t^2-1\right| - \frac{2t}{t^2-1} \right]_{\sqrt{3/2}}^{\sqrt{2}} =$$

$$= -2\sqrt{2} - \mathrm{Log}2 + 4\sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}37740518$$

Volver al Índice

8.6. Cálculo de la longitud de curva en coordenadas paramétricas

Sean $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, las ecuaciones en paramétricas de una función, donde $\varphi(t)$, $\psi(t)$ son funciones continuas con derivadas continuas en el intervalo dado, tal que $\varphi'(t) \neq 0$ en dicho intervalo. En este caso las ecuaciones paramétricas determinan una cierta función $y = f(x)$ continua, con derivada continua de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Sean $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, los valores entre los que varía la variable x. Realizamos el siguiente cambio de variable en la integral definida que obtuvimos para el cálculo de la longitud de arco en el caso de una función dada en coordenadas cartesianas, vista en el apartado anterior:

$$x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)\, dt$$

con lo que, recordando que $y = \psi(t)$, llegamos a:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \frac{[\psi'(t)]^2}{[\varphi'(t)]^2}}\, \varphi'(t)\, dt \quad \text{o} \quad L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt$$

Observación

Se puede demostrar que esta fórmula conserva su validez para las curvas que son cortadas por rectas verticales en más de un punto (en particular para las curvas cerradas) con la condición de que $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ sean continuas en todos los puntos de la curva.

Ejemplos

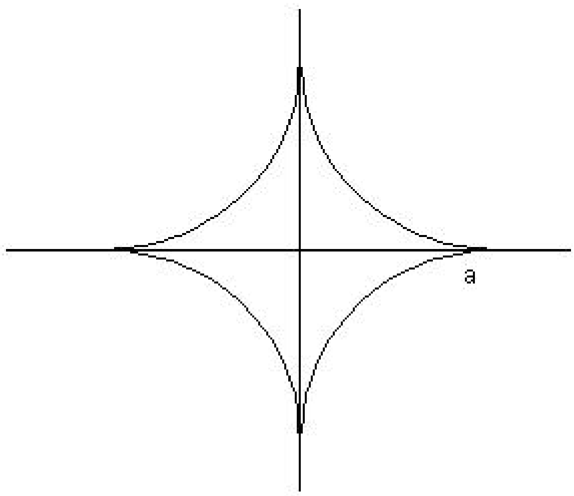
1) Calcular la longitud de la hipocicloide (astroide) cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\,\mathrm{sen}^3 t \end{cases}$$

Solución:

Puesto que la curva es simétrica respecto de los dos ejes de coordenadas, calculemos la longitud del arco perteneciente al primer cuadrante. En él se tendrá:

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\,\mathrm{sen}\,t\,, \quad \frac{dy}{dt} = 3a\,\mathrm{sen}^2 t\cos t$$



Además, t variará entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Por tanto, la longitud total L se calculará a través de la integral definida:

$$\frac{1}{4}L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t \operatorname{sen}^2 t + 9a^2 \operatorname{sen}^4 t \cos^2 t}\ dt =$$

$$= 3a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t\left(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t\right)}\ dt =$$

$$= 3a \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t \cos t\ dt = 3a \left[\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow L = 6a$$

2) Calcular la longitud de la cicloide generada por un círculo de radio 1.

Solución:

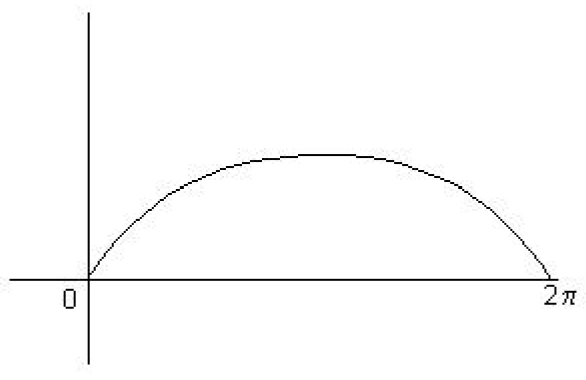
Las ecuaciones en paramétricas de la cicloide, cuando el radio del círculo que la genera es 1, vienen dadas por:

$$x = t - \operatorname{sen} t \quad , \quad y = 1 - \cos t$$

con t variando de 0 a $2p$, es decir, cuando el círculo generador da una vuelta completa sobre sí mismo. Por tanto, la longitud de un arco de la cicloide será:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \operatorname{sen}^2 t}\ dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\ dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\sqrt{4\operatorname{sen}^2(t/2)}\,\frac{dt}{2} = 4 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(t/2)\frac{dt}{2} = -4\left[\cos(t/2)\right]_0^{2\pi} = 8$$



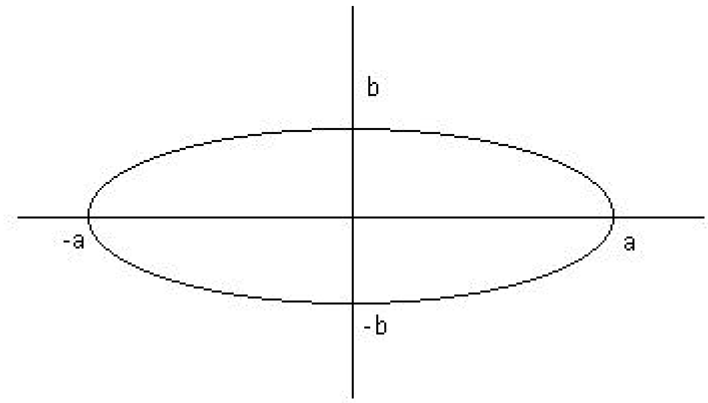
Notemos que, si el radio del círculo que genera a la cicloide es en general distinto de uno, $R \neq 1$, entonces la longitud de un arco de la cicloide viene expresada como $L = 8R$.

3) Calcular la longitud de la elipse de ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$

donde el parámetro t varía entre 0 y $2p$ $(a > b)$.

Solución:

Debido a la simetría de la elipse centrada en el origen con respecto a los dos ejes coordenados, calcularemos la cuarta parte del arco, es decir, la longitud del arco que corresponde a la variación del parámetro en el primer cuadrante, desde $t = 0$ hasta $t = p/2$.



$$\frac{L}{4} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\mathrm{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}\ dt = a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\cos^2 t}\ dt$$

donde $k = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} < 1.$

Por lo tanto, $L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t} \; dt$.

Esta integral no la podemos expresar mediante funciones elementales, y se puede calcular únicamente por medio de métodos de cálculo numérico por aproximación (por ejemplo, utilizando la fórmula de Simpson).

Observación

Si tenemos una curva en el espacio, dada por sus coordenadas paramétricas $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \theta(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, la longitud de uno de sus arcos se define (de manera similar que para una curva plana), como el límite al cual tiende la longitud de una línea quebrada inscrita cuando la longitud de su lado mayor tiende a cero. Si las funciones $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\theta(t)$ son continuas y tienen derivadas continuas en $[\alpha, \beta]$, entonces la curva tiene una longitud determinada (es decir, existe el límite indicado arriba), que se calcula mediante la fórmula:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \theta'(t)^2} \; dt$$

Admitamos este último resultado sin demostración.

Ejemplo

Calcular la longitud de un arco de la hélice cuyas ecuaciones en paramétricas vienen expresadas como

$$x = a\cos t \quad , \quad y = a\,\mathrm{sen}\, t \quad , \quad z = amt$$

y donde el parámetro t varía entre 0 y $2p$.

Solución:

Calculamos las diferenciales de las tres variables en términos de la diferencial del parámetro:

$$dx = -a\,\mathrm{sen}\, t \; dt \quad , \quad dy = a\cos t \; dt \quad , \quad dz = am \; dt$$

Por lo tanto, sustituyendo en la fórmula:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \text{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t + a^2 m^2}\ dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1+m^2}\ dt = 2pa\sqrt{1+m^2}$$

Volver al Índice

8.7. Cálculo de la longitud de curva en coordenadas polares

Sea $\rho = f(\theta)$ la ecuación de una curva en coordenadas polares, donde ρ es el radio polar y θ el ángulo polar. Escribamos las fórmulas de paso de coordenadas polares a cartesianas:

$$x = \rho\cos\theta \quad , \quad y = \rho\,\text{sen}\theta$$

Al sustituir ρ por su expresión, en función de θ, obtenemos las ecuaciones:

$$x = f(\theta)\cos\theta \quad , \quad y = f(\theta)\text{sen}\theta$$

Estas ecuaciones se pueden considerar como las ecuaciones paramétricas de la curva y aplicar el resultado anterior para el cálculo de la longitud de un arco de curva. Hallemos, para ello, las derivadas de x, y respecto del parámetro θ:

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\text{sen}\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\text{sen}\theta + f(\theta)\cos\theta \quad \Rightarrow$$

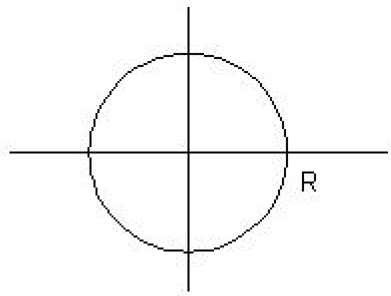
$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2 = \rho'^2 + \rho^2 \Rightarrow$$

$$L = \int_a^b \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\ d\theta$$

Ejemplos

1) Hallar la longitud del círculo $\rho = R$ = constante, con t variando entre 0 y 2*p*.

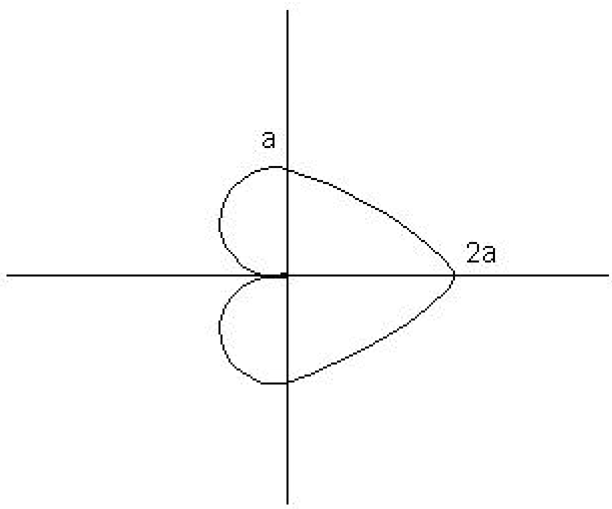
Solución:



$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2}\, dt = 2$$

2) Calcular la longitud de la cardioide $\rho = a\,(1 + \cos\theta)$.

Solución:



$\rho' = -\,a\ \mathrm{sen}\theta$; por lo tanto,

$$ds = \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2 \operatorname{sen}^2\theta}\ d\theta = a\sqrt{2(1+\cos\theta)}\, d\theta = 2a\ \cos(\theta/2)\ d\theta$$

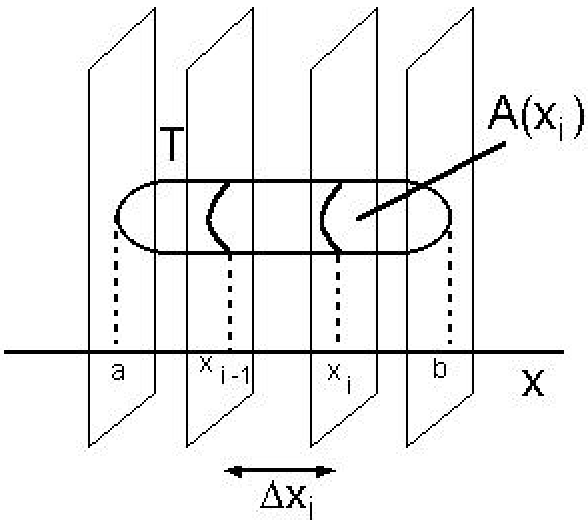
orientando la curva en el sentido de los θ crecientes, para *0* < θ < *p*.
Se puede hacer variar θ de 0 a *p*, y doblar para tener la longitud total, porque la curva es simétrica respecto al eje *OX*. Así,

$$L = 2\int_0^{\pi} 2a\cos(\theta/2)\, d\theta = 8a\ [\operatorname{sen}(\theta/2)]_0^{\pi} = 8a$$

Volver al Índice

8.8. Cálculo del volumen de un cuerpo

Dado un cuerpo *T*, supongamos que se conoce el área de toda sección arbitraria de este cuerpo por un plano perpendicular al eje *OX*.



Este área depende de la posición del plano secante, es decir, es función de x, $A = A(x)$.

Supongamos que $A(x)$ es una función continua de x, y calculemos el volumen del cuerpo dado. Tracemos los planos $x = x_0 = a$, $x = x_1, \ldots$, $x = x_n = b$. Estos planos dividen al cuerpo en franjas. En cada intervalo $x_{i-1} \le x \le x_i$, elijamos un punto arbitrario c_i, y para cada valor de $i = 1, ..., n$ construyamos un cuerpo cilíndrico cuya generatriz sea paralela al eje OX y se apoye sobre el contorno de la sección del cuerpo T por el plano $x = c_i$. El volumen de tal cilindro elemental, con el área de la base igual a $A(c_i)$ (con $x_{i-1} \le c_i \le x_i$), y la altura Δx_i, es igual a $A(c_i)\,\Delta x_i$. El volumen total de todos los cilindros es:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\,\Delta x_i$$

El límite de esta suma, si existe, cuando $\text{máx}\ \Delta x_i \to 0$, se llama volumen del cuerpo dado:

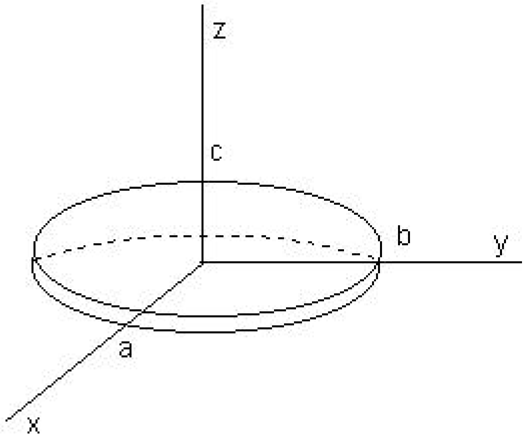
$$\sum_{i=1}^{n} A(c_i)\,\Delta x_i \to V, \quad \text{cuando} \quad \text{máx}\ \Delta x_i \to 0$$

Puesto que V_n representa, evidentemente, una suma integral correspondiente a una función continua $A(x)$ en el segmento $a \le x \le b$, entonces, el límite indicado existe y se expresa por la integral definida:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

Ejemplo

Calcular el volumen del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



Solución:

La sección del elipsoide cortado por un plano paralelo al plano OYZ que se encuentre a la distancia x de éste último da la elipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$ o, equivalentemente,

$$\frac{y^2}{\left[b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2} + \frac{z^2}{\left[c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2} = 1$$

de semiejes $b_1 = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $c_1 = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$

Pero, como el área de dicha elipse es igual a $\pi b_1 c_1$, entonces,

$$A(x) = p\ b\ c\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

De donde se sigue que el volumen del elipsoide será:

$$V = p\ b\ c \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = p\ b\ c \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3} p\ a\ b\ c$$

Notemos que si $a = b = c$, entonces el elipsoide no es nada más que una esfera, de volumen $V = \dfrac{4}{3} p a^3$.

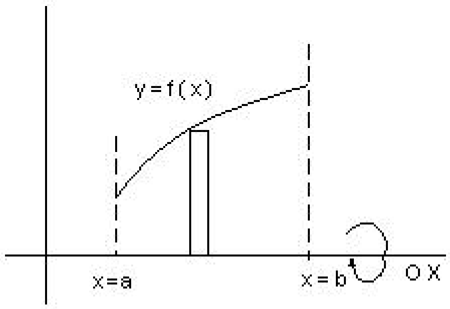
8.9. Cálculo del volumen de un cuerpo de revolución

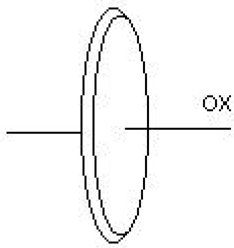
Volver al Índice

Si una región R en el plano OXY se hace girar en torno a un eje del plano, generará un sólido llamado *sólido de revolución*.

8.9.1. Método de discos

Consideremos el cuerpo de revolución engendrado por un trapecio curvilíneo al girar alrededor del eje OX. En este método supondremos que el trapecio está limitado por la curva $y = f(x)$ continua en el intervalo $[a,b]$, el eje OX, y las rectas verticales $x = a$, $x = b$. Bajo estas hipótesis, toda sección arbitraria del cuerpo por un plano perpendicular al eje de abscisas es un círculo de área $A = py^2 = p\,[f(x)]^2$.





Aplicando la fórmula general vista en el apartado anterior para el cálculo de volúmenes en general, en este caso particular obtendremos la fórmula del método llamado de discos:

$$V = \pi\int_a^b y^2\,dx = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

Ejemplo

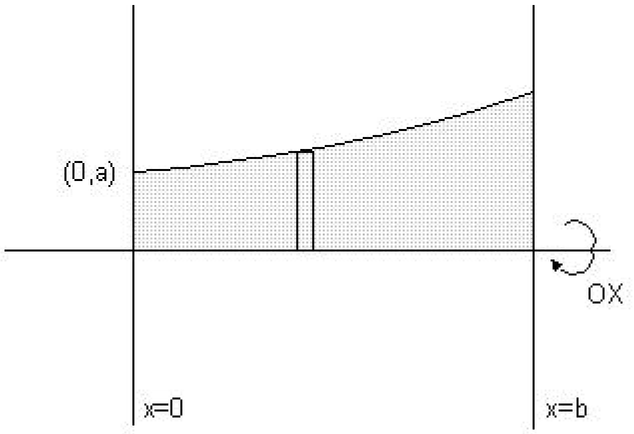
Hallar el volumen del cuerpo de revolución engendrado por la rotación de la catenaria $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$ alrededor del eje OX, en el intervalo comprendido desde $x = 0$ hasta $x = b$.

Solución:

La catenaria es una función continua para todo número real que toma valores positivos si suponemos que $a > 0$. Por tanto, podemos aplicar el método de discos para calcular el volumen que se pide:

$$V = p\,\frac{a^2}{4}\int_0^b \left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)^2 dx = p\,\frac{a^2}{4}\int_0^b \left(e^{2x/a} + 2 + e^{-2x/a}\right) dx =$$

$$= p\,\frac{a^2}{4}\left[\frac{\mathrm{a}}{2}e^{2x/a} + 2x - \frac{\mathrm{a}}{2}e^{-2x/a}\right]_0^b = \frac{\pi a^3}{8}\left(e^{2b/a} - e^{-2b/a}\right) + \frac{\pi a^2 b}{2}$$



Nota

El método de discos se puede enunciar también cambiando los papeles de las variables x e y; es decir, el volumen del sólido de revolución generado por la región plana limitada por la gráfica de $x = g(y)$, el eje OY, y las rectas horizontales $y = c$, $y = d$, al girar alrededor del propio eje OY, vendrá expresado por:

$$V = \pi\int_c^d [g(y)]^2\, dy$$

Volver al Índice

8.9.2. Método de las arandelas

Consideramos ahora el caso en que la región acotada por las rectas verticales $x = a$, $x = b$ y por las gráficas de dos funciones continuas $y = f(x)$, $y = g(x)$, con $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo valor de x en el intervalo $[a,b]$, gira alrededor del eje OX. Entonces, si $g(x) > 0$ en todo el intervalo $[a,b]$, el sólido tiene un hueco o agujero central.

El volumen V puede calcularse aplicando el método de discos anterior, restando el volumen del sólido generado por la región pequeña del volumen generado por la región más grande.

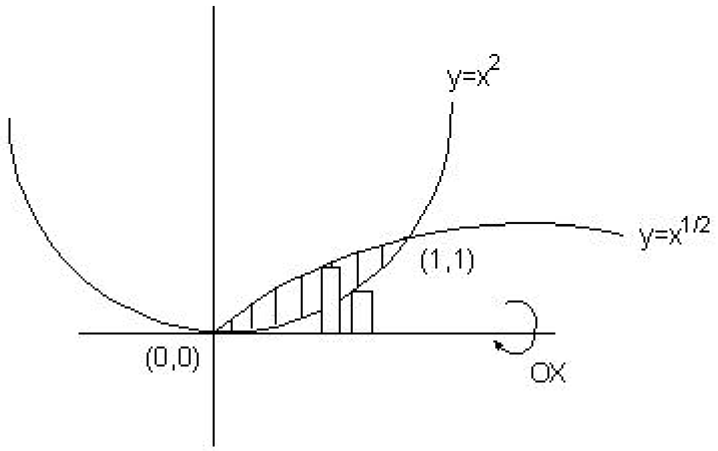
$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\, dx - \pi\int_a^b [g(x)]^2\, dx = \pi\int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx$$

Análogamente, como en el método de discos, se pueden cambiar los papeles de las variables si se hace alrededor del eje *OY*.

Ejemplo

Calcular el volumen del sólido de revolución engendrado por la rotación de la región encerrada por las gráficas $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$, alrededor del eje *OX*.

Solución:



$$V = p\int_0^1 \left(x - x^4\right)dx = p\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = p\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3\pi}{10}$$

8.9.3. Método de las envolventes cilíndricas (cortezas)

Volver al Índice

El volumen de una envolvente cilíndrica de radio exterior r_2, de radio interior r_1 y altura h es:

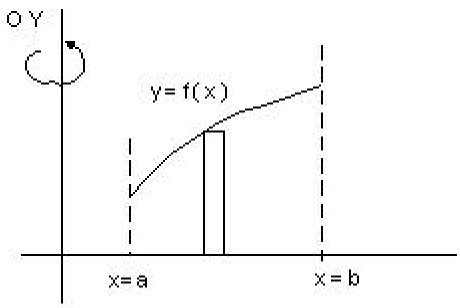
$$p r_2^2 h - p r_1^2 h = p\,(r_2+r_1)(r_2-r_1)\,h = 2p\,\frac{r_2+r_1}{2}\left(r_2-r_1\right)h$$

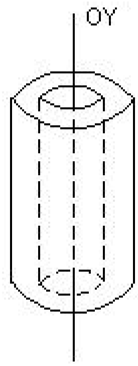
Sea $r=\dfrac{r_2+r_1}{2}$ el radio medio de la corteza. Entonces, el volumen de la corteza es:

$$V = 2\pi rh\Delta r$$

Sea $y = f(x)$ continua y no negativa en el intervalo $[a,b]$ para $0 \leq a < b$. Entonces, el volumen del sólido de revolución generado al girar la región acotada por la gráfica de $y = f(x)$, las rectas verticales $x = a$, $x = b$, y el eje OX, alrededor del eje OY, es:

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$$



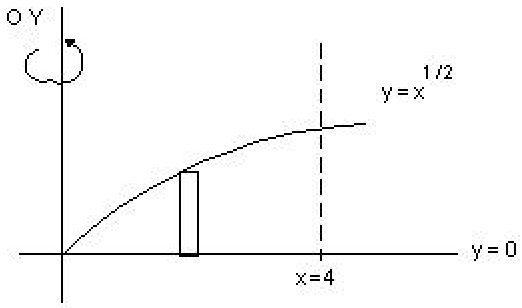


Ejemplo

Obtener el volumen V del sólido formado haciendo girar la región limitada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$, en torno al eje OY.

Solución:

$$V = 2p \int_0^4 x\sqrt{x}\; dx = 2p\; \frac{2}{5}\left[x^{5/2}\right]_0^4 = \frac{128\pi}{5}$$



Volver al Índice

8.10. Cálculo del área lateral de un cuerpo de revolución

Dada una superficie engendrada por la revolución de la curva $y = f(x)$ alrededor del eje OX, calculemos el área lateral de esta superficie de revolución en el intervalo $a \le x \le b$.

Supongamos que la función $y = f(x)$ es continua y tiene derivada continua en todos los puntos del intervalo $[a,b]$.

Tracemos las cuerdas AM_1, $M_1 M_2$, ... , $M_{n-1}B$, cuyas longitudes designamos por ΔS_1, ΔS_2, ... , ΔS_n. En su rotación, cada cuerda de longitud ΔS_i $(i = 1, \dots, n)$ describe un tronco de cono, cuya superficie lateral es:

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta S_i$$

Pero, $\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}}\ \Delta x_i$.

Aplicando el teorema de Lagrange, obtendremos:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i)\ , \qquad x_{i-1} < c_i < x_i$$

Por tanto:

$$\Delta S_i = \sqrt{1+f'^2(c_i)}\,\Delta x_i \quad Þ \quad \Delta P_i = 2p\,\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\sqrt{1+f'^2(c_i)}\,\Delta x_i$$

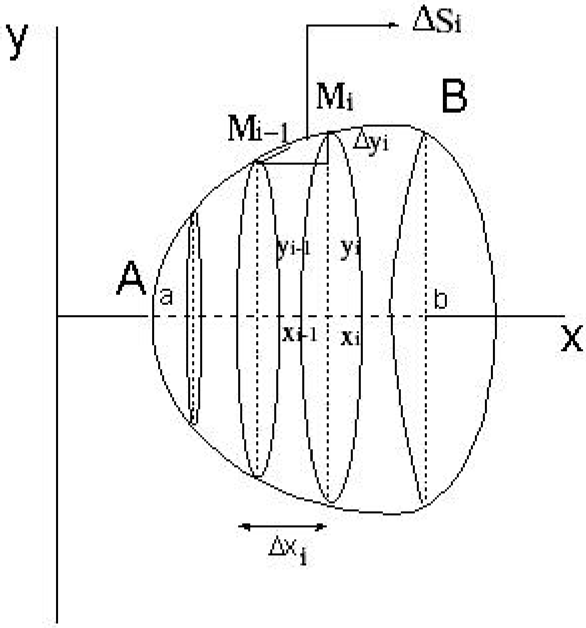
La superficie descrita por la línea poligonal es igual a:

$$P_n = 2p\sum_{i=1}^{n}\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\sqrt{1+f'^2(c_i)}\,\Delta x_i =$$

$$= \pi\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\sqrt{1+f'^2(c_i)}\,\Delta x_i\right] \qquad (1)$$

extendida a todas las cuerdas de la poligonal. El límite de esta suma, cuando el lado mayor de la poligonal tiende a cero, se llama *área lateral de la superficie de revolución*.

El proceso seguido se puede observar en la siguiente figura, donde se ha dibujado un sólido de revolución particular, que nos sirve para ilustrar fácilmente el desarrollo seguido para la obtención de la fórmula correspondiente.



Nótese que la suma anterior no es una suma integral de la función

$$2\pi\, f(x)\sqrt{1+f'^{2}(x)} \tag{2}$$

puesto que en el sumando correspondiente al intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ figuran varios puntos del mismo, a saber, x_{i-1}, x_i, c_i. Sin embargo, se puede demostrar que el límite de la suma (1) es igual al de la suma integral de la función (2), es decir:

$$P \to \pi\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]\sqrt{1+f'^{2}(c_i)}\;\Delta x_i\,, \quad \text{cuando} \quad máx\,\Delta x_i \to 0$$

$$P \to \pi\sum_{i=1}^{n} 2\,f(c_i)\,\sqrt{1+f'^{2}(c_i)}\;\Delta x_i\,, \quad \text{cuando} \quad máx\,\Delta x_i \to 0$$

Por tanto, la superficie lateral buscada, que denotaremos por S, es:

$$S_{ox} = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^{2}(x)}\,dx$$

Nota

Ésta es la fórmula para el cálculo del área lateral de un sólido de revolución cuando se rota la región limitada por la gráfica de $y = f(x)$ (continua y con derivada continua en $[a,b]$), el eje OX, y las rectas verticales $x = a$, $x = b$, alrededor del eje OX. Si se hace el mismo cálculo girando la misma región alrededor del eje OY, la fórmula correspondiente es:

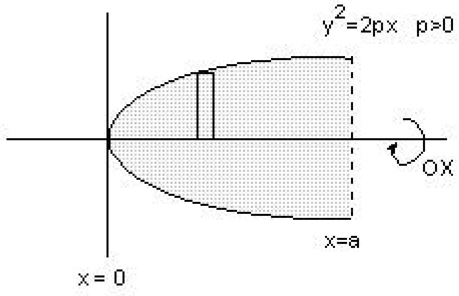
$$S_{oy} = 2\pi\int_a^b x\,\sqrt{1+f'^{2}(x)}\,dx$$

a la cual se llega siguiendo un proceso similar al desarrollado en el caso anterior, considerando ahora el tronco de cono que se genera en la rotación alrededor del eje OY con bases perpendiculares al propio eje OY, y cuya generatriz coincide con la del caso anterior.

Ejemplos

1) Determinar la superficie lateral del paraboloide engendrado por la revolución alrededor del eje OX del arco de la parábola $y^2 = 2px$, correspondiente a la variación de x desde $x = 0$ hasta $x = a$.

Solución:



$$y = \sqrt{2px}\,, \quad y' = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{2p}{4x}} = \sqrt{\frac{2x+p}{2x}}$$

$$S = 2p\int_0^a \sqrt{2px}\sqrt{\frac{2x+p}{2x}}\,dx = 2p\sqrt{p}\int_0^a \sqrt{2x+p}\,dx =$$

$$= 2p\left[\sqrt{p}\,\frac{2}{3}(2x+p)^{3/2}\,\frac{1}{2}\right]_0^a = \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2a+p)^{3/2} - p^{3/2}\right]$$

Nótese que sólo se ha elegido la parte superior de la parábola para calcular la superficie lateral del sólido engendrado, ya que al girar una vuelta entera alrededor del eje OX genera el sólido completo. Si consideramos la parábola entera, obtendríamos, obviamente, el doble de dicha superficie lateral.

Por último, nótese que, si $p < 0$, el sólido engendrado es el mismo, sólo que colocando la parábola en la otra parte del plano. Por tanto, se puede considerar sin pérdida de generalidad el caso en que $p > 0$, como se ha hecho.

2) Calcular la superficie lateral de un cono.

Solución:

La ecuación de la curva que engendra un cono girando alrededor del eje OX es la de una recta de ecuación $y = ax$, donde

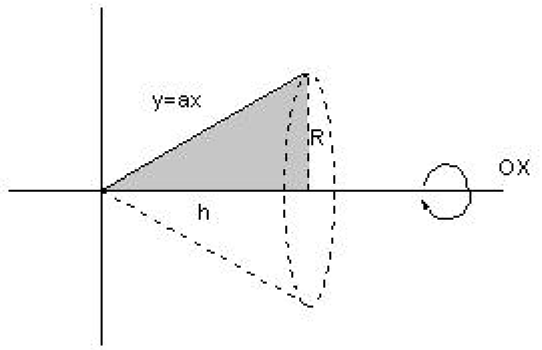
$$a = \text{pendiente} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{h}, \quad y' = a = \frac{R}{h}.$$

Así:

$$S = \int_0^h 2\pi\, y \sqrt{1+y'^2}\, dx = \int_0^h 2\pi \frac{R}{h} x \sqrt{1+\frac{R^2}{h^2}}\, dx = 2p \frac{R}{h} \sqrt{\frac{h^2+R^2}{h^2}} \int_0^h x\, dx$$

como $L = \sqrt{h^2+R^2}$ es la longitud de la generatriz del cono,

$$S = \frac{2\pi R}{h^2} L \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h = \frac{2\pi R}{h^2} L \frac{h^2}{2} = p\, R\, L$$



Volver al Índice

8.11. Cálculo del trabajo mediante la integral definida

Supongamos que, bajo el efecto de una fuerza F, el punto material M se desplaza a lo largo de la recta OS y que la dirección de la fuerza coincide con la del movimiento. Se desea determinar el trabajo producido por la fuerza F al desplazar el punto M desde la posición $s = a$ hasta la posición $s = b$.

1) Si F es constante, el trabajo W se expresará como $W = F(b - a)$.

2) Supongamos que F varía de forma continua en función de la posición del punto material, es decir, es una función $F(s)$, continua en el segmento $a \leq s \leq b$. Dividimos el intervalo $[a,b]$ en n partes arbitrarias de longitudes $\Delta s_1, \Delta s_2, ..., \Delta s_n$. Elegimos en cada segmento parcial $[s_{i-1}, s_i]$ un punto arbitrario c_i y sustituimos el trabajo de la fuerza $F(s)$ en el camino $\Delta s_i \ (i = 1,...,n)$ por el producto $F(c_i)\Delta s_i$. Esto significa que en cada intervalo parcial admitimos como constante la fuerza F, es decir, $F = F(c_i)$. En tal caso, la expresión $F(c_i)\Delta s_i$ para Δs_i suficientemente pequeño dará un valor aproximado del trabajo de la fuerza F a lo largo del camino Δs_i, y la suma
$$W_n = \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta s_i$$
será la expresión aproximada del trabajo de la fuerza F en todo $[a,b]$.
Es evidente que W_n representa una suma integral de la función $F = F(s)$ en el intervalo $[a,b]$. El límite de esta suma cuando $máx\,\Delta s_i \to 0$ existe y expresa el trabajo de la fuerza $F(s)$ a lo largo del camino desde el punto $s = a$ hasta el $s = b$. Así:
$$W = \int_a^b F(s)\,ds$$

Ejemplos

1) La compresión S de un muelle helicoidal es proporcional a la fuerza aplicada F. Calcular el trabajo de la fuerza F al comprimir el muelle 5 cm, si es preciso aplicar una fuerza de 1 kp para comprimirlo 1 cm.

Solución:

Según la hipótesis, la fuerza F y el desplazamiento s están ligados por la ecuación $F = k\ s$, donde k es una constante. Expresamos s en metros y F en kilopondios. Si $s = 0{,}01$, entonces $F = 1$, es decir, $1 = k\ 0{,}01$, de donde $k = 100$, es decir, $F = 100\ s$.
Aplicando la fórmula anterior se tiene

$$W = \int_0^{0.05} 100\, s\, ds = 100 \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^{0.05} = 50\ (0{,}05)^2 = 0{,}125 \text{ kpm}$$

2) La fuerza F de repulsión entre dos cargas eléctricas q_1, q_2 del mismo signo, dispuestas a una distancia r, se expresa mediante la fórmula $F = k\ \dfrac{q_1 q_2}{r^2}$, donde k es una constante.
Determinar el trabajo de la fuerza F para desplazar la carga q_2 desde el punto A, que se encuentra a la distancia r_1 de q_1, al punto B, que se halla a la distancia r_2 de q_1.

Solución:

Supongamos que q_1 se encuentra en el punto 0 tomado como origen. Así:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} k \frac{q_1 q_2}{r^2}\, dr = -k q_1 q_2 \left[\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = k q_1 q_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Para $r_2 = \infty$, se tiene $W = \displaystyle\int_{r_1}^{\infty} k \frac{q_1 q_2}{r^2}\, dr = k\ \frac{q_1 q_2}{r_1}$.

Si, además, $q_2 = 1$, tenemos W = $k\ \dfrac{q_1}{r_1}$ (potencial del campo creado por la carga q_1).

Volver al Índice

8.12. Coordenadas del centro de gravedad

Dado en el plano *OXY* un sistema de puntos materiales $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n)$, cuyas masas son respectivamente m_1, m_2, ... , m_n, los productos $x_i\, m_i$ e $y_i\, m_i$ se llaman momentos estáticos de la masa m_i respecto a los ejes *OY* y *OX*.

Designemos por x_c, y_c las coordenadas del centro de gravedad (baricentro) del sistema dado. Estas coordenadas se calculan mediante las fórmulas:

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + \ldots + x_n m_n}{m_1 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{3}$$

$$y_c = \frac{y_1 m_1 + \ldots + y_n m_n}{m_1 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{4}$$

Utilizaremos estas fórmulas para buscar los centros de gravedad de diversos cuerpos y figuras. Se demuestra que, si un sistema de puntos se puede subdividir en un cierto número de partes disjuntas, su centro de gravedad se obtendrá a partir de los centros de gravedad de las partes materiales, cada una de las cuales está afectada por la masa total de la parte correspondiente.

Volver al Índice

8.12.1. Centro de gravedad de una curva plana

Supongamos que la ecuación $y = f(x)$, $a \le x \le b$, define una curva material *AB*. Sea d la densidad lineal (masa de la unidad de longitud de la curva dada, que supondremos igual en todos los puntos de la curva) de esta curva material. Dividimos la curva en n partes de longitudes Δs_1, ... , Δs_n. Las masas de estas partes serán iguales a los productos de sus longitudes por la densidad lineal

$\Delta m_i = d\ \Delta s_i$. Tomemos un punto arbitrario de abscisa c_i en cada porción de la curva Δs_i. Tomando en cada Δs_i un punto material $P_i[c_i, f(c_i)]$ de masa $d\ \Delta s_i$ y sustituyendo en las fórmulas (3), (4) x_i e y_i por los valores c_i, $f(c_i)$, así como m_i por $d\ \Delta s_i$, obtendremos las fórmulas aproximadas para determinar el centro de gravedad de la curva:

$$x_c \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i\ d\ \Delta s_i}{\sum_{i=1}^{n} d\ \Delta s_i} \qquad y_c \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\ d\ \Delta s_i}{\sum_{i=1}^{n} d\ \Delta s_i}$$

Si la función $y = f(x)$ es continua, al igual que su derivada, entonces las sumas del numerador y del denominador de cada fracción, para $máx\ \Delta s_i \to 0$, tienen sus límites iguales a los límites de las sumas integrales correspondientes. De este modo las coordenadas del centro de gravedad de la curva se expresan por medio de las integrales definidas:

$$x_c = \frac{\int_a^b x\, ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx} \quad , \quad y_c = \frac{\int_a^b f(x)\, ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx}$$

Ejemplo

Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, situada por encima del eje *OX*.

Solución:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}\ , \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ , \quad ds = \sqrt{1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}}\, dx = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$$

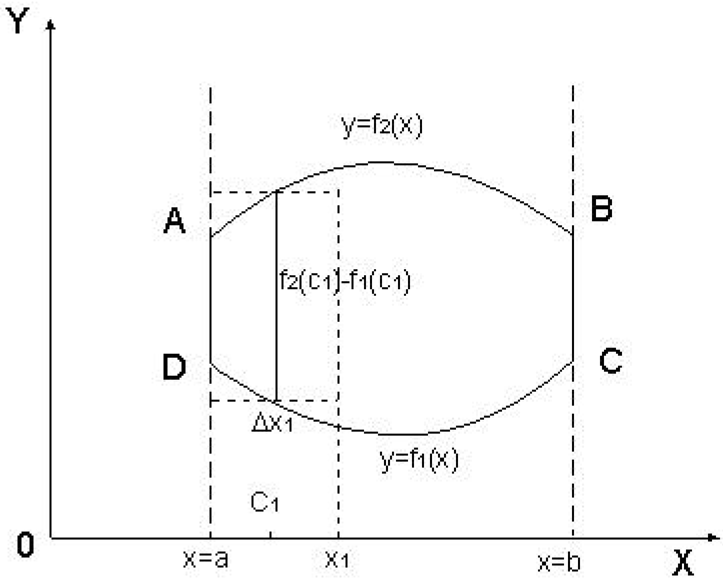
$$x_c = \frac{a\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}} = \frac{\left[-\sqrt{a^2 - x^2}\right]_{-a}^{a}}{\left[\operatorname{arcsen}(x/a)\right]_{-a}^{a}} = \frac{0}{\pi} = 0$$

$$y_c = \frac{\displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx}{\pi a} = \frac{[ax]_{-a}^{a}}{\pi a} = \frac{2a^2}{a\pi} = \frac{2a}{\pi}$$

Volver al Índice

8.12.2. Centro de gravedad de una figura plana

Supongamos que la figura dada, limitada por las curvas $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, y las rectas verticales $x = a$, $x = b$, representa una figura plana material. Consideremos que la densidad superficial (masa de una unidad de área de la superficie) es constante e igual a D en toda la figura. Dividimos la figura dada mediante las rectas $x = x_0 = a$, $x = x_1$, ... , $x = x_n = b$, en bandas paralelas cuyas anchuras son Δx_1, Δx_2, ... , Δx_n.



La masa de cada banda será igual al producto de su área por su densidad superficial D. Al sustituir cada banda por un rectángulo de base Δx_i y altura $f_2(c_i) - f_1(c_i)$, donde $c_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$, la masa de esta banda será aproximadamente igual a:

$$\Delta m_i = D\,\left[f_2(c_i) - f_1(c_i)\right]\Delta x_i\,, \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

El centro de gravedad de esta banda se encuentra, aproximadamente, en el centro del rectángulo correspondiente:

$$(x_i)_c = c_i\,, \qquad (y_i)_c = \frac{f_2(c_i) + f_1(c_i)}{2}$$

Localizando la masa de cada banda en su centro de gravedad, encontremos el valor aproximado de las coordenadas del centro de gravedad de la figura:

$$x_c \approx \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i\, D\left[f_2(c_i) - f_1(c_i)\right]\Delta x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} D\left[f_2(c_i) - f_1(c_i)\right]\Delta x_i}$$

$$y_c \approx \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{f_2(c_i) + f_1(c_i)}{2} D\left[f_2(c_i) - f_1(c_i)\right]\Delta x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} D\left[f_2(c_i) - f_1(c_i)\right]\Delta x_i}$$

Pasando al límite cuando $\Delta x_i \to 0$, obtendremos las coordenadas exactas del centro de gravedad de la figura dada, convirtiéndose las sumas finitas en sumas integrales:

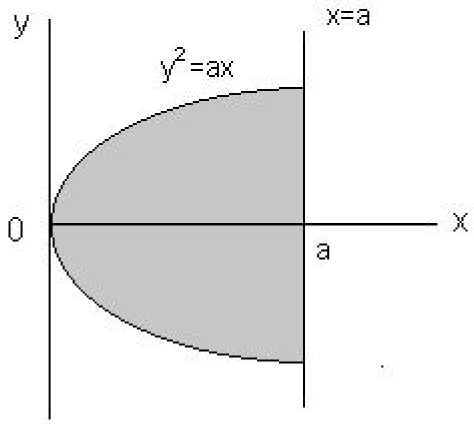
$$x_c = \frac{\int_a^b x\,[f_2(x) - f_1(x)]\,dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx} \quad , \quad y_c = \frac{\int_a^b \frac{f_2(x) + f_1(x)}{2}[f_2(x) - f_1(x)]\,dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx}$$

Estas fórmulas son válidas para toda figura plana homogénea (es decir, aquella con densidad constante en todos sus puntos). Como vemos, las coordenadas del centro de gravedad no dependen de la densidad *D* (pues se ha eliminado en el cálculo).

Ejemplo

Determinar las coordenadas del centro de gravedad del área encerrada por la parábola $y^2 = ax$, y la recta vertical $x = a$.

Solución:



$$f_1(x) = -\sqrt{ax} \quad , \quad f_2(x) = \sqrt{ax}$$

$$x_c = \frac{2\int_0^a x\sqrt{ax}\,dx}{2\int_0^a \sqrt{ax}\,dx} = \frac{\frac{2}{5}\sqrt{a}\left[\sqrt{x^5}\right]_0^a}{\frac{2}{3}\sqrt{a}\left[\sqrt{x^3}\right]_0^a} = \frac{3}{5}a$$

$y_c = 0$, puesto que el segmento es simétrico respecto al eje *OX*.

Volver al Índice

8.13. Cálculo de momentos de inercia mediante la integral definida

8.13.1. Momento de inercia de una curva material

Dado en el plano *OXY* un sistema de puntos materiales $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ... , $P_n(x_n, y_n)$, cuyas masas son respectivamente m_1, m_2, ... , m_n, como sabemos por Mecánica, el momento de inercia de un sistema de puntos materiales respecto al punto 0 se determina del modo siguiente:

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + y_i^2\right) m_i \quad \text{o} \quad I_0 = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i \quad \text{con} \quad r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 \tag{5}$$

Sea la curva *AB* dada por su ecuación $y = f(x)$, $a \le x \le b$. Supongamos que esta curva es material y que su densidad lineal es constante e igual a d. Dividamos una vez más la línea en n puntos de longitudes Δs_1, ... , Δs_n, donde

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Las masas de estas porciones son iguales a los productos de sus longitudes por la densidad lineal, es decir, $\Delta m_i = d\,\Delta s_i$. Tomemos un punto arbitrario de abscisa c_i en cada porción de la curva. La ordenada en ese punto será $p_i = f(c_i)$. El momento de inercia de la curva respecto del origen O será, aproximadamente, según (5):

$$I_0 \approx \sum_{i=1}^{n} \left(c_i^2 + p_i^2\right) \Delta m_i \tag{6}$$

Si la función $y = f(x)$ y su derivada $f\,'(x)$ son continuas, para $máx\,\Delta s_i \to 0$, la suma (6) tiene límite, que se expresa como una integral definida, determinando el momento de inercia de la línea material:

$$I_0 = d\int_a^b \left[x^2 + f(x)^2\right]\sqrt{1+f\,'(x)^2}\;dx \tag{7}$$

Volver al Índice

8.13.2. Momento de inercia de una barra homogénea de longitud L respecto a su extremo

Colocamos una barra de longitud L sobre el eje OX, de tal forma que uno de sus extremos coincida con el origen ($0 \le x \le L$). En este caso

$$\Delta s_i = \Delta x_i\,,\quad \Delta m_i = d\;\Delta x_i\,,\quad r_i^2 = x_i^2$$

La fórmula (7) toma la forma de:

$$I_0 = d\int_0^L x^2 dx = d\,\frac{L^3}{3} \tag{8}$$

Si conocemos la masa M de la barra, entonces la densidad lineal se puede expresar como $d = \dfrac{M}{L}$, y (8) se transforma en:

$$I_0 = \frac{1}{3}ML^2 \tag{9}$$

Volver al Índice

8.13.3. Momento de inercia de una circunferencia material de radio r respecto al centro

Puesto que los puntos de la circunferencia se encuentran a la distancia r del centro y su masa es $m = 2p\;r\;d$, entonces:

$$I_0 = mr^2 = d\,2\pi r^3 \tag{10}$$

Volver al Índice

8.13.4. Momento de inercia de un círculo homogéneo de radio *r* respecto al centro

Sea d la masa de una unidad de área del círculo o densidad superficial. Dividamos el círculo en n anillos. Consideremos uno de esos anillos. Sea r_i su radio interior y $r_i + \Delta r_i$ su radio exterior. La masa Δm_i de este anillo, calculado un error infinitésimo de orden superior a Δr_i, será $\Delta m_i = d\ 2p\ r_i\ \Delta r_i$. En virtud del apartado anterior, el momento de inercia de su masa respecto al centro será aproximadamente igual a:

$$\left(\Delta I_0\right)_i \approx d\ 2p\ r_i\ \Delta r_i\ r_i^2 = d\ 2p\ r_i^3\ \Delta r_i$$

El momento de inercia de todo el círculo, considerado como el conjunto de todos los anillos, se expresará mediante:

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n} d\ 2\pi r_i^3\ \Delta r_i \tag{11}$$

Pasando al límite, para $máx\,\Delta r_i \to 0$, obtendremos el momento de inercia del área del círculo respecto a su centro:

$$I_0 = d\ 2\pi \int_0^R r^3\ dr = \pi\, d\ \frac{R^4}{2} \tag{12}$$

Si conocemos la masa M del círculo, entonces, la densidad superficial d se puede expresar como $d = \dfrac{M}{\pi R^2}$.

Introduciendo este valor en (12), obtendremos en definitiva:

$$I_0 = M\,\frac{R^2}{2}$$