

CAPÍTULO 9. INTEGRALES IMPROPIAS

9.1. Límites de integración infinitos

9.2. Integrales con integrando que tiende a infinito

9.3. Observaciones a las integrales impropias

Capítulo 9

Integrales impropias

$$\begin{array}{ccc}
 \int_a^t f(x)dx & \rightarrow & \int_a^\infty f(x)dx \quad (t \rightarrow \infty) \\
 \int_a^t f(x)dx & \rightarrow & \int_a^b f(x)dx \quad (t \rightarrow b)
 \end{array}$$

Capítulo 9

Integrales impropias

Hasta ahora hemos realizado todo el estudio sobre las integrales definidas bajo dos hipótesis fundamentales, el hecho de que los límites de integración eran finitos y la continuidad de la función a integrar, $f(x)$, en el intervalo de integración $[a, b]$. Cuando alguna de esas dos condiciones no se cumple, se dice que la integral que resulta es *impropia*.

Estudiaremos estos casos por separado, viendo como conclusión el caso general en el que pudieran no cumplirse estas dos hipótesis a la vez.

9.1. Límites de integración infinitos

En este primer caso, supondremos que la función a integrar, $f(x)$, está definida y es continua en un intervalo no acotado. Esta situación puede darse de tres maneras distintas: que el límite superior de integración sea infinito, que el límite inferior de integración sea menos infinito, o que ninguno de los límites de integración sea finito. Veamos cada una de estas tres posibilidades:

$$1) \text{ Si } f(x) \text{ es continua en } [a, \infty) \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

donde $\int_a^t f(x) dx$ es una integral definida.

$$2) \text{ Si } f(x) \text{ es continua en } (-\infty, a] \Rightarrow \int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx$$

donde $\int_t^a f(x) dx$ es una integral definida.

3) Si $f(x)$ es continua para todo x real y a es un número real cualquiera:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx$$

y cada una de las integrales impropias del miembro de la derecha, se calcularán según lo visto en los casos 1) y 2).

Es decir, en cualquier caso, para calcular una integral impropia, primero pasamos a calcular una integral definida dependiendo de un parámetro t que haremos tender a más o menos infinito, según el caso. Así pues, el cálculo del valor de una integral impropia se reduce al cálculo de manera consecutiva de una integral definida y de un límite. Debido, precisamente, a la operación del cálculo del límite de una función, este límite puede ser real (convergencia) o puede ser infinito (divergencia). Esta situación da lugar a la siguiente clasificación en las integrales impropias: cuando los límites de 1) y 2) existan, se dirá que las integrales *convergen*; si no existen (son infinito), se dirá que *divergen*. En 3) la integral de la izquierda se dice que converge si y solo si convergen las dos de la derecha (si una de ellas diverge independientemente de la otra, también será divergente la de la izquierda).

Ejemplos

$$1) I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 9}$$

Volver
caso 1)

El límite superior de integración toma valor no finito. Así pues, según el caso 1), tenemos:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 9} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{dx}{x^2 + 9}$$

Calculamos primero la integral definida con límite de integración superior igual a t :

$$\int_0^t \frac{dx}{x^2 + 9} = \int_0^t \frac{1/9}{(x/3)^2 + 1} dx = \frac{1}{3} [\arctg(x/3)]_0^t = \frac{1}{3} \arctg(t/3)$$

Por último, calculamos el límite cuando t tiende a más infinito de esta función:

$$\frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctg(t/3) = \frac{1}{3} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Por tanto, I es convergente y su valor es $I = \frac{\pi}{6}$.

[Volver
caso 2\)](#)

$$2) I = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

El límite inferior de integración toma valor no finito. Así pues, según el caso 2), tenemos:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

Calculamos primero la integral definida con límite de integración inferior igual a t :

$$\int_t^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int_t^0 (1-x)^{-1/2} dx = -2 \left[(1-x)^{1/2} \right]_t^0 = -2 + 2\sqrt{1-t}$$

Por último, calculamos el límite cuando t tiende a menos infinito de esta función:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (-2 + 2\sqrt{1-t}) = -2 + \infty = \infty$$

Por tanto, I es divergente y su valor es $I = \infty$.

[Volver
caso 3\)](#)

$$3) I = \int_{-\infty}^{+\infty} x 2^{-x^2} dx$$

En este caso los dos límites de integración son no finitos. Así pues, según el caso 3), separamos esta integral en suma de otras dos por un punto cualquiera intermedio, por ejemplo, el cero:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x 2^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 x 2^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} x 2^{-x^2} dx$$

Calculamos cada una de estas dos nuevas integrales impropias según los casos 1) o 2). Por tanto:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 x 2^{-x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 x 2^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\frac{2^{-x^2}}{\text{Log } 2} \right]_t^0 = \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{2\text{Log } 2} + \frac{2^{-t^2}}{2\text{Log } 2} \right] = -\frac{1}{2\text{Log } 2} \\ \int_0^{+\infty} x 2^{-x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t x 2^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{2^{-x^2}}{\text{Log } 2} \right]_0^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2^{-t^2}}{2\text{Log } 2} + \frac{1}{2\text{Log } 2} \right] = \frac{1}{2\text{Log } 2} \end{aligned}$$

Por tanto, I es convergente y su valor es $I = -\frac{1}{2\text{Log } 2} + \frac{1}{2\text{Log } 2} = 0$.

9.2. Integrales con integrando que tiende a infinito

En este segundo caso supondremos que la función a integrar, $f(x)$, tiene una discontinuidad infinita para algún valor en el intervalo de integración cerrado y acotado, $[a, b]$. Así, tenemos tres posibilidades:

- 1) Si $f(x)$ es continua en $[a, b)$, y $|f(x)| \rightarrow \infty$, cuando $x \rightarrow b^-$, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

donde $\int_a^t f(x) dx$ es una integral definida.

- 2) Si $f(x)$ es continua en $(a, b]$, y $|f(x)| \rightarrow \infty$, cuando $x \rightarrow a^+$, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

donde $\int_t^b f(x) dx$ es una integral definida.

- 3) Si $|f(x)| \rightarrow \infty$, cuando $x \rightarrow c$, con $a < c < b$ y $f(x)$ es continua en todos los demás puntos del intervalo $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

donde cada una de las integrales impropias del miembro de la derecha se calculan según lo visto en los casos 1) y 2) anteriores.

Al igual que en el caso en que aparecían límites de integración infinitos, para calcular una integral impropia en cualquiera de estas tres situaciones mencionadas, primero tendremos que calcular una integral definida dependiendo de un parámetro t que posteriormente haremos tender al valor real donde se produce la discontinuidad infinita de la función a integrar. Así pues, el cálculo del valor de una integral impropia se reduce de nuevo al cálculo de manera consecutiva de una integral definida y de un límite. También aquí diremos que las integrales impropias *convergen* si existen (son finitos) los límites anteriores, y se dirá que *divergen* en caso contrario. En el caso 3) la integral impropia de la izquierda se dice que converge si y solo si convergen las dos de la derecha (si una de ellas diverge independientemente de la otra, también será divergente la de la izquierda).

Ejemplos

$$1) I = \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$$

Volver
caso 1)

La función a integrar en este caso presenta una discontinuidad infinita dentro del intervalo de integración en el punto $x = 4$. Así pues, según el caso 1), tenemos:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \lim_{t \rightarrow 4^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$$

Calculamos primero la integral definida con límite de integración superior igual a t :

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} &= \int_0^t \frac{1/4}{\sqrt{1-(x/4)^2}} dx = [\arcsen(x/4)]_0^t = \\ &= \arcsen(t/4) - \arcsen 0 = \arcsen(t/4) \end{aligned}$$

Por último, calculamos el límite cuando t tiende a 4 por la izquierda de esta función:

$$\lim_{t \rightarrow 4^-} (\arcsen(t/4)) = \frac{\pi}{2}$$

Por tanto, I es convergente y su valor es $I = \frac{\pi}{2}$.

$$2) I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

Volver
caso 2)

En este caso, la función a integrar presenta una discontinuidad infinita dentro del intervalo de integración en el punto $x = 1$. Así pues, según el caso 2), tenemos:

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

Calculamos primero la integral definida con límite de integración superior igual a t :

$$\int_t^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \int_t^2 (x-1)^{-1/2} dx = \left[\frac{(x-1)^{1/2}}{1/2} \right]_t^2 = 2[1 - \sqrt{t-1}]$$

Por último, calculamos el límite cuando t tiende a 1 por la derecha de esta función:

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} 2[1 - \sqrt{t-1}] = 2$$

Por tanto, I es convergente y su valor es $I = 2$.

Volver
caso 3)

$$3) I = \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

En este caso, la función a integrar presenta una discontinuidad infinita dentro del intervalo de integración en el punto $x = 1$. Así pues, según el caso 3), tenemos:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

Cada una de las integrales del miembro de la derecha se calcula según lo visto para el caso 1) o 2).

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t (x-1)^{-1/3} dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3}{2} \lim_{t \rightarrow 1^+} \left[(x-1)^{2/3} \right]_0^t = -\frac{3}{2} \\
 \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_0^t (x-1)^{-1/3} dx = \\
 &= \frac{3}{2} \lim_{t \rightarrow 1^+} \left[(x-1)^{2/3} \right]_t^4 = \frac{3}{2} \sqrt[3]{9}
 \end{aligned}$$

Por tanto, I es convergente y su valor es $I = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{9} - 1)$.

9.3. Observaciones a las integrales impropias

Observación 1: Los casos que se han comentado en los apartados anteriores se han referido a situaciones simples. En general, varias de esas situaciones se pueden producir a la vez en una misma integral. Es posible que en una misma integral aparezca algún límite de integración infinito y que la función a integrar posea una discontinuidad infinita en algún punto dentro del intervalo de integración. Para determinar si converge o no esta integral impropia hay que separarla como la suma de tantas integrales impropias como sea necesario, de forma que cada una de ellas solamente posea un punto de impropiedad en algún límite de integración. Esta separación, obviamente, se realizará a través de puntos interiores del intervalo, en los cuales la función a integrar sea continua. Si convergen todas las integrales impropias en que se haya separado la integral original, entonces ésta será convergente. Si, al menos, alguna de ellas es divergente, entonces también lo será la original.

Ejemplos

$$1) I = \int_{-\infty}^6 \frac{dx}{(4-x)^2}$$

En este caso tenemos un límite de integración no finito, junto con un valor numérico, $x = 4$, en el cual la función a integrar presenta una discontinuidad infinita. Así pues, la descomponemos como sigue:

$$\int_{-\infty}^6 \frac{dx}{(4-x)^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(4-x)^2} + \int_0^4 \frac{dx}{(4-x)^2} + \int_4^6 \frac{dx}{(4-x)^2}$$

donde se ha elegido el punto interior $x = 0$, de continuidad de la función, para separar la integral. Calculemos cada una de ellas por separado:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(4-x)^2} &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 (4-x)^{-2} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\frac{-1}{4-x} \right]_t^0 = \\ &= -\frac{1}{4} + \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4-t} \right) = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{dx}{(4-x)^2} &= \lim_{t \rightarrow 4^-} \int_0^t \frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{t \rightarrow 4^-} \int_0^t (4-x)^{-2} dx = \lim_{t \rightarrow 4^-} \left[\frac{-1}{4-x} \right]_0^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow 4^-} \left(\frac{-1}{4-t} \right) + \frac{1}{4} = -\infty + \frac{1}{4} = -\infty \end{aligned}$$

Como esta integral es divergente, no es necesario calcular la tercera integral de la descomposición, ya se que se concluye que I es divergente.

$$2) I = \int_0^1 \frac{\text{Log} x}{\sqrt{1-x}} dx$$

Aquí existen dos valores numéricos dentro del intervalo, $x = 0$, $x = 1$, en el cual la función a integrar presenta una discontinuidad infinita. Así pues, la descomponemos como sigue:

$$\int_0^1 \frac{\text{Log} x}{\sqrt{1-x}} dx = \int_0^{1/2} \frac{\text{Log} x}{\sqrt{1-x}} dx + \int_{1/2}^1 \frac{\text{Log} x}{\sqrt{1-x}} dx$$

donde se ha elegido el punto interior $x = 1/2$, de continuidad de la función, para separar la integral. Vamos a calcular en primer lugar la integral indefinida de la función:

$$\int \frac{\text{Log}x}{\sqrt{1-x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \text{Log}x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = (1-x)^{-1/2} dx \quad \Rightarrow \quad v = -2\sqrt{1-x} \end{array} \right\} =$$

$$= -2\text{Log}x \sqrt{1-x} + 2 \int \frac{\sqrt{1-x}}{x} dx$$

Calculemos la nueva integral indefinida que nos ha aparecido aparte:

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{x} dx = \{1-x = t^2 \Rightarrow dx = -2t dt\} = -2 \int \frac{t^2}{1-t^2} dt =$$

$$= 2 \int \frac{1-t^2-1}{1-t^2} dt = 2t - 2 \int \frac{dt}{1-t^2} = 2t - \text{Log} \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C =$$

$$= 2\sqrt{1-x} - \text{Log} \left| \frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}} \right| + C =$$

$$= 2\sqrt{1-x} - \text{Log} \left| \frac{(1+\sqrt{1-x})^2}{x} \right| + C =$$

$$= 2\sqrt{1-x} - 2\text{Log}|1+\sqrt{1-x}| + \text{Log}x + C$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{\text{Log}x}{\sqrt{1-x}} dx = -2\text{Log}x \sqrt{1-x} + 4\sqrt{1-x} - 4\text{Log}|1+\sqrt{1-x}| + 2\text{Log}x + C =$$

$$= F(x) + C$$

Así, procedemos ahora a calcular las dos integrales impropias en que hemos separado la integral original I :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{1/2} \frac{\text{Log} x}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^{1/2} \frac{\text{Log} x}{\sqrt{1-x}} dx = \\
& = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[-2\text{Log} x \sqrt{1-x} + 4\sqrt{1-x} - 4\text{Log} |1 + \sqrt{1-x}| + 2\text{Log} x \right]_{t^{1/2}} = \\
& = F\left(\frac{1}{2}\right) - \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[-2\text{Log} t \sqrt{1-t} + 4\sqrt{1-t} - 4\text{Log} |1 + \sqrt{1-t}| + 2\text{Log} t \right] = \\
& = F\left(\frac{1}{2}\right) - 4 + 4\text{Log} 2 \\
& \int_{1/2}^1 \frac{\text{Log} x}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_{1/2}^t \frac{\text{Log} x}{\sqrt{1-x}} dx = \\
& = \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[-2\text{Log} x \sqrt{1-x} + 4\sqrt{1-x} - 4\text{Log} |1 + \sqrt{1-x}| + 2\text{Log} x \right]_{1/2}^t = \\
& = \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[-2\text{Log} t \sqrt{1-t} + 4\sqrt{1-t} - 4\text{Log} |1 + \sqrt{1-t}| + 2\text{Log} t \right] - F\left(\frac{1}{2}\right) = \\
& = -F\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Finalmente, $I = -4 + 4\text{Log} 2$.

Observación 2: Otra observación importante que debemos hacer está dirigida al error bastante frecuente consistente en:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f(x) dx$$

La operación correcta, como hemos comentado en la observación 1, sería realizar la separación en dos integrales impropias de la forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

donde a debe ser un punto de continuidad para la función $f(x)$. Cada una de estas integrales impropias se calculará como en los casos anteriores.

Observación 3: La separación $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

sólo se puede realizar en integrales impropias si son convergentes las dos integrales de la derecha.

Observación 4: Cuando existe un punto de discontinuidad infinita de la función a integrar estrictamente interior al intervalo de integración, hay que llevar cuidado de partir la integral por ese punto. Si no se procede de esta

manera, se puede llegar a resultados falsos. Por ejemplo, sea $I = \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3}$, donde el

valor de $x = 0$, estrictamente interior al intervalo, es el único punto de discontinuidad infinita de la función a integrar. La manera correcta de proceder sería:

$$I = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3} + \int_0^2 \frac{dx}{x^3}$$

Calculamos la primera de estas integrales impropias:

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t x^{-3} dx = \lim_{t \rightarrow 0^-} \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_{-1}^t = \lim_{t \rightarrow 0^-} \left[\frac{-1}{2t^2} \right] + \frac{1}{2} = -\infty$$

Por tanto, I es divergente.

Si no nos damos cuenta de que es impropia y la intentamos calcular como definida, llegaremos a:

$$I = \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3} = \left[\frac{-1}{2x^2} \right]_{-1}^2 = \frac{-1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

que es bastante diferente al resultado correcto obtenido anteriormente.