MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Jesús Rubí Miranda (jesusrubi1@yahoo.com)
http://mx.geocities.com/dicalculus/

1 Integración de diferenciales trigonométricas

1.1 Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u\, du$

Cuando $m \vee n \in \mathbb{N}$ impar , no importa lo que es el otro, pues tendríamos una integral de la forma

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

v. g., si m es impar, tenemos

$$\operatorname{sen}^m u = \operatorname{sen}^{m-1} u \operatorname{sen} u$$

y $m-1$ es par, el primer término del segundo miembro será potencia se $\operatorname{sen}^2 u$ y podemos expresarlo en potencias de $\cos^2 u$ sustituyendo

$$\operatorname{sen}^2 u = 1 - \cos^2 u$$

Entonces la integral queda

$$\int (\text{suma de términos que contienen } \cos u) \operatorname{sen} u\, du$$

Sabemos que $\operatorname{sen} u\,du = -d(\cos u)$, cada término que se debe integrar tiene la forma $u^n du$ con $u = \cos u$.

Del mismo modo, si n es el que es impar, tenemos

$$\cos^n u = \cos^{n-1} u \cos u$$

y empleamos la sustitución $\cos^2 u = 1 - \operatorname{sen}^2 u$. Entonces la integral queda

$$\int (\text{suma de términos que contienen } \operatorname{sen} u) \cos u\, du$$

1.2 Integrales de la forma $\int \operatorname{tg}^n u\, du$ o $\int \operatorname{ctg}^n u\, du$

Cuando $n \in \mathbb{N}$, hacemos

$$\operatorname{tg}^n u = \operatorname{tg}^{n-2} \operatorname{tg}^2 u = \operatorname{tg}^{n-2} u \left(\sec^2 u - 1\right)$$

o

$$\operatorname{ctg}^n u = \operatorname{ctg}^{n-2} u \operatorname{ctg}^2 u = \operatorname{ctg}^{n-2} u \left(\csc^2 u - 1\right)$$

1.3 Integrales de la forma $\int \sec^n u\, du$ o $\int \csc^n u\, du$

Cuando $n \in \mathbb{N}$ par , hacemos

$$\sec^n u = \sec^{n-2} u \sec^2 u = \left(\operatorname{tg}^2 u + 1\right)^{\frac{n-2}{2}} \sec^2 u$$

o

$$\csc^n u = \csc^{n-2} u \csc^2 u = \left(\operatorname{ctg}^2 u + 1\right)^{\frac{n-2}{2}} \csc^2 u$$

1.4 Integrales de la forma $\int \operatorname{tg}^m u \sec^n u\, du$ o $\int \operatorname{ctg}^m u \csc^n u\, du$

Cuando $n \in \mathbb{N}$ par , procedemos como en el caso anterior.

1.5 Cálculo de integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u\, du$ por medio de ángulos múltiplos

Cuando $m \vee n \in \mathbb{N}$ impar , aplicamos el caso 1. Cuando ambos $m \wedge n \in \mathbb{N}$ par , la expresión diferencial se expresa en términos de senos y cosenos de ángulos múltiplos. Las fórmulas usadas son:

$$\operatorname{sen} u \cos u = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2u$$

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$$

$$\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$$

1.6 Integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen} mu \cos nu\, du$$

$$\int \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu\, du$$

$$\int \cos mu \cos nu\, du \quad \text{cuando } m \neq n$$

Utilizando identidades trigonométricas, tenemos:

$$\int \operatorname{sen} mu \cos nu\, du = \int \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(m+n)u + \operatorname{sen}(m-n)u\right] du = -\frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)}$$

$$\int \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu\, du = \int \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)u - \cos(m+n)u\right] du = \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} - \frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)}$$

$$\int \cos mu \cos nu\, du = \int \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)u + \cos(m+n)u\right] du = \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + \frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)}$$

2 Integración por sustitución trigonométrica, de expresiones que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$ o $\sqrt{u^2 \pm a^2}$

Cuando se presentan estos casos, aplicamos un cambio de variable así, para:

$$\sqrt{a^2 - u^2} \quad \text{hágase} \quad u = a \operatorname{sen} z$$

$$\sqrt{u^2 + a^2} \quad \text{hágase} \quad u = a \operatorname{tg} z$$

$$\sqrt{u^2 - a^2} \quad \text{hágase} \quad u = a \sec z$$

en efecto

$$\sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 z} = a\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 z} = a \cos z$$

$$\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 z + a^2} = a\sqrt{\operatorname{tg}^2 z + 1} = a \sec z$$

$$\sqrt{a^2 \sec^2 z - a^2} = a\sqrt{\sec^2 z - 1} = a \operatorname{tg} z$$

3 Integración por fracciones

Un *polinomio* en x es una función de la forma

$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ donde a es una constante, con $a_0 \neq 0$ y n , que se llama grado del polinomio, un entero no negativo.

Todo polinomio de coeficientes reales se puede expresar (al menos teóricamente) como producto de factores lineales del tipo $ax + b$ y factores reales cuadráticos irreducibles del tipo $ax^2 + bx + c$. (Un polinomio de grado 1 o mayor se dice irreducible si no puede ser factorizado en polinomios de grados más bajos.) La fórmula cuadrática $ax^2 + bx + c$ es irreducible si y sólo si $b^2 - 4ac < 0$, en este caso, las raíces de $ax^2 + bx + c$ no son reales.

Una *fracción racional* es aquella cuyo numerador y denominador son polinomios en x .

Una fracción racional es *propia* cuando el grado del numerador es menor que el del denominador. En caso contrario, es una fracción racional *impropia*.

Una fracción racional impropia puede expresarse como la suma de un polinomio y una fracción racional propia.

3.1 Factores Lineales Distintos

A cada factor lineal $ax + b$ no repetido en el denominador de una fracción racional propia le corresponde una sola fracción simple de la forma

$$\frac{A}{ax+b} \ ,$$

donde $A \in \mathbb{R}$ y habrá que determinarlo.

3.2 Factores Lineales Repetidos

A cada factor lineal $ax + b$ que aparezca n veces en el denominador de una fracción racional propia le corresponde una suma de n fracciones simples de la forma

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n} \ ,$$

donde $A \in \mathbb{R}$ y habrá que determinarlo.

3.3 Factores cuadráticos distintos

A cada factor cuadrático irreducible $ax^2 + bx + c$ no repetido en el denominador de una fracción racional propia le corresponde una sola fracción simple de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} \ ,$$

donde $A, B \in \mathbb{R}$ y habrá que determinarlos.

3.4 Factores cuadráticos repetidos

A cada factor cuadrático irreducible $ax^2 + bx + c$ que aparezca n veces en el denominador de una fracción racional propia le corresponde una suma de n fracciones simples de la forma

$$\frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 x + B_2}{\left(ax^2 + bx + c\right)^2} + \cdots + \frac{A_n x + B_n}{\left(ax^2 + bx + c\right)^n}$$

donde $A, B \in \mathbb{R}$ y habrá que determinarlos.

4 Integración por sustitución de una nueva variable

4.1 Diferencias que contienen sólo potencias fraccionarias de x

Una expresión que contienen solamente potencias fraccionarias de x puede transformarse en forma racional mediante la sustitución

$$x = z^n$$

siendo n el mínimo común denominador de los exponentes fraccionarios de x .

4.2 Diferencias que contienen sólo potencias fraccionarias de $ax + b$

Una expresión que contiene solamente potencias fraccionarias de $ax + b$ puede transformarse en forma racional mediante la sustitución

$$ax + b = z^n$$

siendo n el mínimo común denominador de los exponentes fraccionarios de la expresión $ax + b$.

5 Transformación de diferenciales trigonométricas

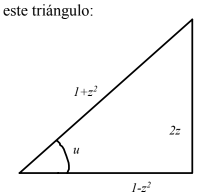
Una diferencial trigonométrica que contiene sólo funciones racionales de $\operatorname{sen} u$ y $\cos u$ puede transformarse en otra expresión diferencial, racional en z , mediante la sustitución

$$\operatorname{tg} \frac{u}{2} = z$$

o (lo que es lo mismo) por las sustituciones

$$\operatorname{sen} u = \frac{2z}{1+z^2} \ , \quad \cos u = \frac{1-z^2}{1+z^2} \ , \quad du = \frac{2dz}{1+z^2} \ .$$

A modo de ayuda este triángulo:



6 Diferenciales binomias

Una diferencial de la forma

$$x^m \left(a + bx^n\right)^p dx \ ,$$

siendo $a, b \in \mathbb{R}$ y los exponentes $m, n, p \in \mathbb{Q}$, se llama una *diferencial binomia*.

Hagamos

$$x = z^\alpha \text{; entonces } dx = \alpha z^{\alpha - 1} dz \ ,$$

y

$$x^m \left(a + bx^n\right)^p dx = \alpha z^{m\alpha + \alpha - 1} \left(a + bz^{n\alpha}\right)^p dz \ .$$

Si se elige un número entero α de manera que $m\alpha$ y $n\alpha$ sean número enteros, vemos que la diferencial dada es equivalente a otra de la misma forma, donde m y n se han reemplazado por números enteros. Además, la sustitución

$$x^m \left(a + bx^n\right)^p dx = x^{m+np} \left(ax^{-n} + b\right)^p dx$$

transforma la diferencial dada en otra de la misma forma, donde $-n$ reemplaza el exponente n de x . Por tanto, cualquiera que sea el signo algebraico de n , el exponente de x dentro del paréntesis será positivo en una de las dos diferenciales.

Cuando p es un número positivo, se puede desarrollar la potencia del binomio según la fórmula de Newton e integrar la diferencial término a término. En lo que sigue, p se supone una fracción; por tanto, la reemplazamos por $\frac{r}{s}$, siendo $r, s \in \mathbb{Z}$.

Por consiguiente el siguiente enunciado:

Proposición. *Toda diferencial binomia puede reducirse a la forma*

$$x^m \left(a + bx^n\right)^{\frac{r}{s}} dx$$

siendo $m, r, s \in \mathbb{Z}$ *y* $n \in \mathbb{N}$.

Ahora veremos como quitar los radicales:

Caso I. Cuando $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$. En este caso se efectuará la sustitución $a + bx^n = z^s$.

Caso II. Cuando $\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s} \in \mathbb{Z}$. En este caso se efectúa la sustitución $a + bx^n = z^s x^n$.

Bibliografía

WILLIAM ANTHONY GRANVILLE: *Elements of Differential and Integral Calculus*, John Wiley & Sons, Inc.

FRANK AYRES, JR: *Differential and Integral Calculus*, McGraw-Hill.

♦