Ejercicios de Integrales resueltos

1. Resuelve la integral:

$$\int \frac{Ln\,x}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

SOLUCIÓN

Llamemos $I = \int \frac{Ln\,x}{\sqrt{1-x}}\,dx$

Aplicamos partes: $\left\{ \begin{array}{l} Ln\,x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du \\ \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = dv \Rightarrow v = -2\sqrt{1-x} \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$I = -2\sqrt{1-x}\;Ln\,x + 2\int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,dx$$

$$2\int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} 1-x = t^2 \\ -dx = 2tdt \end{array} \right\} = -4\int \frac{t\cdot t}{1-t^2}\,dt = -4\int \frac{t^2}{1-t^2}\,dt =$$

$$= -4\int \left(-1+\frac{1}{1-t^2}\right)dt = 4\int dt - 4\int \frac{dt}{1-t^2} = 4t - 4\int \frac{dt}{1-t^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1-t^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} \Rightarrow A(1+t) + B(1-t) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}; B = \frac{1}{2} \\ -4\int \frac{dt}{1-t^2} = -2\int \frac{dt}{1-t} - 2\int \frac{dt}{1+t} = 2Ln|1-t| - 2Ln|1+t| + \mathbb{C} \end{array} \right.$$

Deshaciendo los cambios de variable:

$$I = -2\sqrt{1-x}Lnx + 4\sqrt{1-x} + 2Ln\left|1-\sqrt{1-x}\right| - 2Ln\left|1+\sqrt{1-x}\right| + \mathbb{C}$$

$$I = -2\sqrt{1-x}Lnx + 4\sqrt{1-x} + 2Ln\frac{\left|1-\sqrt{1-x}\right|}{\left|1+\sqrt{1-x}\right|} + \mathbb{C}$$

$$\int \frac{Ln\,x}{\sqrt{1-x}}\,dx = -2\sqrt{1-x}\,Lnx + 4\sqrt{1-x} + 2Ln\frac{\left|1-\sqrt{1-x}\right|}{\left|1+\sqrt{1-x}\right|} + \mathbb{C}$$

2. Resuelve la integral:

$$\int \frac{1-\operatorname{sen} x+\cos x}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}dx$$

SOLUCIÓN

Sea $I=\int \frac{1-\operatorname{sen} x+\cos x}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}dx$. Hacemos el cambio de variable: $\operatorname{tg} x/2 = t$ entonces $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$; $\operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ con lo que la integral dada se transforma en:

$$I=\int \frac{1-\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\mathrm{dt}}{1+\mathrm{t}^2}=\int\frac{2-2t}{2t^2+2t}\cdot\frac{2\mathrm{dt}}{1+\mathrm{t}^2}=2\int\frac{1-t}{t(t+1)(1+t^2)}dt=$$

$$=2\int\frac{dt}{t(t+1)(1+t^2)}-2\int\frac{dt}{(t+1)(1+t^2)}$$

Podemos descomponer en fracciones simples cada integrando es decir:

$$\frac{1}{t(t+1)(1+t^2)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{(Mt+N)}{1+t^2}$$

Poniendo denominador común, obtenemos que:

$$1=\mathrm{A}(t+1)(1+t^2)+Bt(1+t^2)+(Mt+N)t(t+1)$$

Igualando los coeficientes de los términos del mismo grado obtenemos el siguiente resultado: $A=1$; $B=-\frac{1}{2}$; $M=-\frac{1}{2}$; $N=-\frac{1}{2}$

Por otra parte tendremos: $\frac{1}{(t+1)(1+t^2)}=\frac{C}{t+1}+\frac{Dt+E}{1+t^2}$

Poniendo denominador común, obtenemos que:

$$1=C(1+t^2)+(Dt+E)(t+1)$$

Igualando los coeficientes de los términos del mismo grado obtenemos el siguiente resultado: $C=\frac{1}{2}$; $\mathrm{D}=-\frac{1}{2}$; $E=\frac{1}{2}$

La integral original se puede descomponer como:

$$I=2\left[\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{2}\int\frac{t+1}{1+t^2}dt\right]-2\left[\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1}+\frac{1}{2}\int\frac{1-t}{1+t^2}dt\right]=$$

$$2Ln|t|-Ln|t+1|-\frac{1}{2}Ln|1+t^2|-arc.tagt-Ln|t+1|+\frac{1}{2}Ln|1+t^2|-arc.tagt+C=$$

$$=2Ln|t|-2Ln|t+1|-2arc.tagt+C$$

Deshacemos el cambio de variable realizado, $\operatorname{tg} x/2 = t$, obteniendo:

$$I=2Ln\left|\frac{\operatorname{tg} x/2}{1+\operatorname{tg} x/2}\right|-x+C$$

3. Resuelve la integral:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4}$$

SOLUCIÓN

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4} = \int \frac{dx}{(x+2)(x-2)}$$

Utilizaremos el método de descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x+2)}{(x+2)(x-2)}$$

Igualando los numeradores: $1 = A(x-2) + B(x+2)$, y dando a x los valores de las raíces reales del denominador, se obtienen valores para A y B:

$$x = 2 \Rightarrow B = \frac{1}{4} \quad , \quad x = -2 \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$$

Luego, aplicando propiedades elementales de integración:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4} = \int \frac{-1/4}{x+2}dx + \int \frac{1/4}{x-2}dx = -\frac{1}{4} Log|x+2| + \frac{1}{4} Log|x-2| + C$$

4. Obtener una primitiva de la función:

$$y = \frac{x+2}{x^2(x^2-1)}$$

SOLUCIÓN

Descomponiendo $\dfrac{x+2}{x^2(x^2-1)}$ en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{x^2(x^2-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-1} \Rightarrow$$

$$x + 2 = Ax(x+1)(x-1) + B(x+1)(x-1) + Cx^2(x-1) + Dx^2(x+1)$$

Resolvemos la ecuación anterior:
Si $x = 0 \Rightarrow 2 = -B \Rightarrow B = -2$. Si $x = 1 \Rightarrow 3 = 2D \Rightarrow D = 3/2$.
Si $x = -1 \Rightarrow 1 = -2C \Rightarrow C = -1/2$. Si $x = 2 \Rightarrow 6A = -6 \Rightarrow A = -1$

Por lo tanto: $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2(x^2-1)}dx = \int \frac{-1}{x}dx + \int \frac{-2}{x^2}dx + \int \frac{-1/2}{x+1}dx + \int \frac{3/2}{x-1}dx$
Las integrales resultantes son inmediatas por lo que:

$\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2(x^2-1)}dx = -Ln|x| + \frac{2}{x} - \frac{1}{2}Ln|x+1| + \frac{3}{2}Ln|x-1| + C$, es decir:

$$\int \frac{x+2}{x^2(x^2-1)}dx = \frac{2}{x} - Ln|x| + \frac{1}{2}Ln\frac{|x-1|^3}{|x+1|} + C$$

5. Resuelve la integral:

$$\int arc.\text{tg}\sqrt{x}\; dx$$

SOLUCIÓN

Sea $I = \int arc.\text{tg}\sqrt{x}\; dx$. Tomamos partes: $\left\{ \begin{array}{l} u = arc.\text{tg}\sqrt{x} \Rightarrow du = \dfrac{1}{1+x}\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x \end{array} \right\}$

$$I = x\, arc.\text{tg}\sqrt{x} - \int x \frac{1}{1+x}\frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx\,.$$

$$\int x \frac{1}{1+x}\frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right\} = \int \frac{t^2}{1+t^2}\frac{1}{2t} 2tdt = \int \frac{t^2}{1+t^2} dt =$$

$= \int \left(1 - \dfrac{t}{1+t^2}\, dt\right) = \int dt - \int \dfrac{t}{1+t^2}\, dt = t - arc.\text{tg}\, t$. Deshaciendo el cambio:

$\int \dfrac{x}{1+x}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{x} - arc.\text{tg}\sqrt{x} + C$. Por lo tanto:

$$I = x\, arc.\text{tg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + arc.\text{tg}\sqrt{x} + C$$

$$\int arc.\text{tg}\sqrt{x}\; dx = (x+1) arc.\text{tg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$$

6. Resuelve la integral:

$$I=\int \frac{x\, arc.\mathrm{tg}\, x}{(x^2+1)^2}dx$$

SOLUCIÓN

Aplicando partes: $I=\left\{\begin{matrix} u=arc.\mathrm{tg}\, x \Rightarrow du=\dfrac{1}{1+x^2} \\ dv=\dfrac{xdx}{1+x^2} \Rightarrow v=-\dfrac{1}{2(1+x^2)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$I=-\frac{1}{2}\frac{arc.\mathrm{tg}\, x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

Aplicamos el método de Hermite para resolver: $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{ax+b}{1+x^2}+\int \frac{Ax+B}{1+x^2}dx$$

$$\frac{1}{(1+x^2)^2}=\frac{a(1+x^2)-2x(ax+b)}{(1+x^2)^2}+\frac{Ax+B}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$1=a(1+x^2)-2x(ax+b)+(Ax+B)(1+x^2)$$

Identificando coeficientes:

$$\begin{aligned} x^3 &: \quad 0=A \\ x^2 &: \quad 0=a-2a+B \Rightarrow B=a \\ x &: \quad 0=-2b+A \Rightarrow b=0 \\ 1 &: \quad 1=a+B \Rightarrow a=B=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{2}arc.\mathrm{tg}\, x+C$$

Sustituyendo estos valores resulta que:

$$\int \frac{x\, arc.\mathrm{tg}\, x}{(x^2+1)^2}dx=-\frac{1}{2}\frac{arc.\mathrm{tg}\, x}{1+x^2}+\frac{1}{4}\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{4}arc.\mathrm{tg}\, x+C$$

7. Resuelve la integral:

$$I=\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+4x}\,dx$$

SOLUCIÓN

Dividimos numerador y denominador por $\sqrt{x}$ y reducimos al mismo índice:

$$I=\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+4x}\,dx=\int \frac{dx}{x^{1/6}+4x^{1/2}}=\int \frac{dx}{x^{1/6}+4x^{3/2}}$$

Hacemos el cambio: $\left\{\begin{array}{l} x^{1/6}=t\Rightarrow x=t^6 \\ dx=6t^5dt \end{array}\right\}\Rightarrow I=\int \frac{6t^5}{t+4t^3}\,dt=$

$$=6\int\left(\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\frac{1}{4t^2+1}\right)dt=6\left(\frac{1}{4\cdot 3}t^3-\frac{1}{16}t+\frac{1}{16\cdot 2}\,arc.\operatorname{tg}(2t)\right)+C$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+4x}\,dx=\frac{1}{2}x^{1/2}-\frac{3}{8}x^{1/6}+\frac{3}{16}\,arc.\operatorname{tg}(2x^{1/6})+C$$

8. Resuelve la integral:

$$I = \int \frac{x^2 - x + 14}{(x-4)^3(x-2)}\,dx$$

SOLUCIÓN

Descomponiendo $\dfrac{x^2 - x + 14}{(x-4)^3(x-2)}$ en fracciones simples:

$$\frac{x^2 - x + 14}{(x-4)^3(x-2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{(x-4)^3} + \frac{D}{x-2} \Rightarrow$$

$$x^2 - x + 14 = A(x-4)^2(x-2) + B(x-4)(x-2) + C(x-2) + D(x-4)^3$$

Dando a x los valores de las raíces reales del denominador de la función racional original:

Si $x = 2 \Rightarrow 16 = -8D \Rightarrow D = -2$; si $x = 4 \Rightarrow 26 = 2C \Rightarrow C = 13$

Por otra parte: $Ax^3 + Dx^3 = 0 \Rightarrow A = -D \Rightarrow A = 2$

Dando a x un valor cualquiera, por ejemplo 0, obtenemos: $B = -3$

Sustituyendo estos valores:

$$\int \frac{x^2 - x + 14}{(x-4)^3(x-2)}\,dx = \int \frac{2}{x-4}\,dx + \int \frac{-3}{(x-4)^2}\,dx + \int \frac{13}{(x-4)^3}\,dx + \int \frac{-2}{x-2}\,dx$$

Integrales inmediatas todas ellas, por lo tanto:

$$I = 2Ln|x-4| + 3\frac{1}{x-4} - \frac{13}{2}\frac{1}{(x-4)^2} - 2Ln|x-2| + C$$

$$\int \frac{x^2 - x + 14}{(x-4)^3(x-2)}\,dx = 2Ln\frac{|x-4|}{|x-2|} + 3\frac{1}{x-4} - \frac{13}{2}\frac{1}{(x-4)^2} + C$$

9. Resuelve la integral:

$$I = \int x\sqrt{\sqrt[3]{x^2}+2}\,dx$$

SOLUCIÓN

Hacemos el cambio: $\left\{\begin{array}{l} x^{2/3} + 2 = t^2 \Rightarrow x = (t^2-2)^{3/2} \\ dx = \dfrac{3}{2}(t^2-2)^{1/2}\,2t\,dt \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$I = \int (t^2-2)^{3/2} t \cdot 3(t^2-2)^{1/2} t\,dt = 3\int (t^6 - 4t^4 + 4t^2)dt = 3t^3\left(\frac{t^4}{7} - \frac{4}{5}t^2 + \frac{4}{3}\right) + C$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int x\sqrt{\sqrt[3]{x^2}+2}\,dx = 3\left(x^{2/3}+2\right)^{3/2}\left[\frac{(x^{2/3}+2)^2}{7} - \frac{4}{5}(x^{2/3}+2) + \frac{4}{3}\right] + C$$

10. Resuelve la integral:

$$I=\int \frac{x+5}{(x+1)^3(x+2)(x+3)}\,dx$$

SOLUCIÓN

Descomponiendo $\dfrac{x+5}{(x+1)^3(x+2)(x+3)}$ en fracciones simples:

$$\frac{x+5}{(x+1)^3(x+2)(x+3)}=\frac{A}{(x+1)^3}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)}+\frac{D}{(x+2)}+\frac{E}{(x+3)}\Rightarrow$$

$$x+5=A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+2)(x+3)+C(x+1)^2(x+2)(x+3)+$$
$$+D(x+1)^3(x+3)+E(x+1)^3(x+2)$$

Si $x=-1\Rightarrow 4=2A\Rightarrow A=2$; si $x=-2\Rightarrow 3=-D\Rightarrow D=-3$

Si $x=-3\Rightarrow 2=8E\Rightarrow E=\dfrac{1}{4}$

Si: $\begin{cases} x=0\Rightarrow B+C=\dfrac{1}{4} \\ x=1\Rightarrow B+2C=3 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} B=-\dfrac{5}{2} \\ C=\dfrac{11}{4} \end{cases}$ Sustituyendo estos valores:

$$I=2\int\frac{dx}{(x+1)^3}-\frac{5}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\frac{11}{4}\int\frac{dx}{(x+1)}-3\int\frac{dx}{(x+2)}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+3)}\Rightarrow$$

$$\int\frac{x+5}{(x+1)^3(x+2)(x+3)}\,dx=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{5}{2}\,\frac{1}{x+1}+Ln\frac{|x+1|^{11/4}|x+3|^{1/4}}{|x+2|^3}+C$$

11. Resuelve la integral:

$$I=\int \operatorname{sen} x\cdot Ln(2+\operatorname{sen} x)dx$$

SOLUCIÓN

Tomando partes: $\left\{\begin{array}{ll} u=Ln(2+\operatorname{sen} x)\Rightarrow du=\dfrac{\cos x}{2+\operatorname{sen} x}dx \\ dv=\operatorname{sen} x dx \quad \Rightarrow v=-\cos x \end{array}\right\}\Rightarrow$

$$I=-\cos x Ln(2+\operatorname{sen} x)+\int\frac{\cos^2 x}{2+\operatorname{sen} x}dx$$

Ahora bien: $\dfrac{\cos^2 x}{2+\operatorname{sen} x}=\dfrac{1-\operatorname{sen}^2 x}{2+\operatorname{sen} x}=2-\operatorname{sen} x-\dfrac{3}{2+\operatorname{sen} x}$

$$\int\frac{\cos^2 x}{2+\operatorname{sen} x}dx=\int\left(2-\operatorname{sen} x-\frac{3}{2+\operatorname{sen} x}\right)dx=2x+\cos x-\int\frac{3}{2+\operatorname{sen} x}dx$$

Calculamos $\int\dfrac{3}{2+\operatorname{sen} x}dx$. Hacemos el cambio: $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg} x/2=t\Rightarrow \operatorname{sen} x=\dfrac{2t}{1+t^2} \\ dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt \end{array}\right\}$

entonces: $\displaystyle\int\frac{3}{2+\operatorname{sen} x}dx=3\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{2+\frac{2t}{1+t^2}}=3\int\frac{2}{2t^2+2t+2}dt=3\int\frac{dt}{t^2+t+1}=$

$$=3\int\frac{dt}{\left(t+1/2\right)^2+\frac{3}{4}}=3\int\frac{dt}{\left(t+1/2\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$=3\cdot\frac{4}{3}\int\frac{dt}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+1/2\right)\right]^2}=$$

$$=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}arc.\operatorname{tg}\frac{2\left(t+1/2\right)}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=2\sqrt{3}\,arc.\operatorname{tg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

Deshaciendo los cambios y sustituyendo en I obtenemos:

$$I=-\cos x Ln(2+\operatorname{sen} x)+2x+\cos x-2\sqrt{3}\,arc.\operatorname{tg}\left(\frac{2\operatorname{tg} x/2+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

12. Resuelve la integral:

$$I=\int \frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}\,dx$$

SOLUCIÓN

Descomponemos en fracciones simples $\dfrac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}$:

$$\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}+\frac{Ex+F}{(x^2+2)^3}\Rightarrow$$

$$x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4=(Ax+B)(x^2+2)^2+(Cx+D)(x^2+2)+\\+Ex+F$$

Igualando los coeficientes de los términos del mismo grado, llegamos al sistema lineal:

$$\begin{array}{ll}
x^5: & 1=A\\
x^4: & -1=B\\
x^3: & 4=4A+C\\
x^2: & -4=4B+D\\
x\ : & 8=4A+2C+E\\
1\ : & -4=4B+2D+F
\end{array}$$

Su solución es: $A=1,\ \ B=-1,\ \ C=0,\ \ D=0,\ \ E=4,\ \ F=0$
La integral quedará:

$$I=\int\frac{x-1}{x^2+2}dx+\int\frac{4x}{(x^2+2)^3}dx=\int\frac{x}{x^2+2}dx+\int\frac{-dx}{x^2+2}+\int\frac{4x}{(x^2+2)^3}dx$$

$$I=\frac{1}{2}Ln\left|x^2+2\right|-\frac{\sqrt{2}}{2}arc.\text{tg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{(x^2+2)^2}+C$$

13. Resuelve la integral:

$$I = \int \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}}{\operatorname{sen}3x}\,dx$$

SOLUCIÓN

Como las razones trigonométricas que aparecen en el integrando están referidas a ángulos distintos debemos pasar esta expresión a otra igual donde las razones trigonométricas estén referidas al mismo ángulo. Utilizamos para ello las fórmulas que relacionan productos con sumas de funciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}A\cos B = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(A+B)+\operatorname{sen}(A-B)\right] \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}+\frac{5x}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}-\frac{5x}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}3x-\operatorname{sen}2x\right]$$

$$\operatorname{sen}2x = 2\operatorname{sen}x\cos x$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}3x &= \operatorname{sen}(2x+x) = \operatorname{sen}x\cos 2x + \cos x\operatorname{sen}2x = \\ &= \operatorname{sen}x\cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x + 2\operatorname{sen}x\cos^2 x = \\ &= 3\operatorname{sen}x\cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x = 3\operatorname{sen}x\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right) - \operatorname{sen}^3 x = \\ &= \operatorname{sen}x\left(3-4\operatorname{sen}^2 x\right)\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la integral dada obtenemos:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{sen}3x-\operatorname{sen}2x}{\operatorname{sen}3x}\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{sen}2x}{\operatorname{sen}3x}dx$$

$$I_1 = \int \frac{\operatorname{sen}2x}{\operatorname{sen}3x}dx = 2\int \frac{\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{sen}x\left(3-4\operatorname{sen}^2 x\right)}dx = 2\int \frac{\cos x}{3-4\operatorname{sen}^2 x}dx =$$

$$= \left\{\operatorname{sen}x = t \Rightarrow \cos x\,dx = dt\right\} = 2\int \frac{dt}{3-4t^2} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{1-\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \left\{\frac{2t}{\sqrt{3}} = u \Rightarrow dt = \frac{\sqrt{3}}{2}du\right\} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{du}{1-u^2}$$

Descomponemos en fracciones simples $\frac{1}{1-u^2}$:

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} \Rightarrow 1 = A(1+u) + B(1-u) \Rightarrow A = \frac{1}{2},\ \ B = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{du}{1-u^2} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}Ln|1-u| + \frac{1}{2\sqrt{3}}Ln|1+u| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}Ln\frac{|1+u|}{|1-u|} + C$$

Deshaciendo cambios: $I_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}Ln\frac{\left|\sqrt{3}+2t\right|}{\left|\sqrt{3}-2t\right|} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}Ln\frac{\left|\sqrt{3}+2\operatorname{sen}x\right|}{\left|\sqrt{3}-2\operatorname{sen}x\right|} + C$

por lo que: $I = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4\sqrt{3}} Ln \frac{\left|\sqrt{3} + 2\operatorname{sen} x\right|}{\left|\sqrt{3} - 2\operatorname{sen} x\right|} + C$

14. Resuelve la integral:

$$I = \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+2)^2}\,dx$$

SOLUCIÓN

Puesto que el denominador presenta raíces complejas múltiples, aplicamos el método de Hermite para resolver la integral:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+2)^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{ax+b}{x^2+2}\right] + \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+2}$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+2)^2} = \frac{a(x^2+2)-2x(ax+b)}{(x^2+2)^2} + \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+2} =$$

$$= \frac{\left[a(x^2+2)-2x(ax+b)\right](x-1)+A(x^2+2)^2+(Mx+N)(x-1)(x^2+2)}{(x^2+2)^2(x-1)}$$

Por lo tanto:

$$x^2+1 = \left[a(x^2+2)-2x(ax+b)\right](x-1)+A(x^2+2)^2+(Mx+N)(x-1)(x^2+2)$$

Igualando los coeficientes de los términos del mismo grado, llegamos al sistema lineal:

$$\begin{aligned}
x^4 &: \quad 0 = A + M \\
x^3 &: \quad 0 = -a - M + N \\
x^2 &: \quad 1 = a - 2b + 4A - N + 2M \\
x &: \quad 0 = 2a + 2b + 2N - 2M \\
1 &: \quad 1 = -2a + 4A - 2N
\end{aligned}$$

Su solución es: $a = \frac{1}{12}$, $b = -\frac{1}{6}$, $A = \frac{2}{9}$, $M = -\frac{2}{9}$, $N = -\frac{5}{36}$

Llevamos estos valores a la integral y resulta:

$$I = \frac{\frac{1}{12}x - \frac{1}{6}}{x^2+2} + \frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{9}\int\frac{2x}{x^2+2}dx - \frac{5}{36}\int\frac{dx}{x^2+2}$$

Finalmente resolvemos las integrales inmediatas y obtenemos:

$$I = \frac{1}{12}\frac{x-2}{x^2+2} + \frac{2}{9}Ln|x-1| - \frac{1}{9}Ln(x^2+2) - \frac{5\sqrt{2}}{72}arc.\operatorname{tg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

15. Resuelve la integral:

$$I=\int \frac{\left(16-9x^2\right)^{3/2}}{x^6}\,dx$$

SOLUCIÓN

Hacemos el cambio $\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{4}{3}\operatorname{sen}u \\ dx=\dfrac{4}{3}\cos u\,du \end{array}\right\}$ con lo que:

$$I=\frac{4}{3}\int \frac{\sqrt{\left(16-16\operatorname{sen}^2 u\right)^3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^6\operatorname{sen}^6 u}\cos u\,du=\frac{3^5}{4^2}\int \frac{\cos^3 u\cos u}{\operatorname{sen}^6 u}du$$

Dividiendo por $\cos^6 u$ nos queda:

$$I=\frac{3^5}{4^2}\int \frac{\frac{1}{\cos^2 u}}{\operatorname{tg}^6 u}du=\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg}u=t \\ \dfrac{1}{\cos^2 u}du=dt \end{array}\right\}=\frac{3^5}{4^2}\int t^{-6}dt=-\frac{3^5}{4^2}\frac{1}{5}t^{-5}+C$$

Para deshacer los cambios hemos de tener en cuenta:

$$\operatorname{sen}u=\frac{3}{4}x\Rightarrow \cos u=\sqrt{1-\frac{9}{16}x^2}=\frac{\sqrt{16-9x^2}}{4};\ \ \operatorname{tg}u=\frac{3x}{\sqrt{16-9x^2}}$$

$$\int \frac{\sqrt{\left(16-9x^2\right)^3}}{x^6}dx=-\frac{3^5}{4^2}\frac{1}{5}\left(\frac{3x}{\sqrt{16-9x^2}}\right)^{-5}+C$$

16. Resuelve la integral:

$$I=\int \frac{thx}{1+thx}dx$$

SOLUCIÓN

Teniendo en cuenta: $\left.\begin{array}{l} shx=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2} \\ chx=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow thx=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

$$\int \frac{thx}{1+thx}dx=\int \frac{\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}{1+\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}dx=\int \frac{e^x-e^{-x}}{2e^x}dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int \frac{e^{-x}}{e^x}dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{thx}{1+thx}dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}e^{-2x}+C$$

17. Resuelve la integral:

$$I=\int \frac{x\,dx}{\left(4x^2+12x+9\right)\sqrt{x^2-4x+3}}$$

SOLUCIÓN

$$I=\int \frac{x\,dx}{(2x+3)^2\sqrt{x^2-4x+3}}=\left\{\begin{array}{l} 2x+3=\dfrac{1}{t} \\ 2dx=-\dfrac{dt}{t^2} \end{array}\right\}=$$

$$=\int \frac{\dfrac{1-3t}{2t}\cdot\dfrac{-dt}{2t^2}}{\left(\dfrac{1}{t}\right)^2\sqrt{\left(\dfrac{1-3t}{2}\right)^2-4\left(\dfrac{1-3t}{2}\right)+3}}=-\frac{1}{4}\int \frac{\dfrac{1-3t}{t^3}\cdot dt}{\dfrac{1}{t^2}\sqrt{\dfrac{9t^2-6t+1}{4}-\dfrac{4-12t}{2}+3}}$$

$$I=-\frac{1}{2}\int \frac{1-3t}{\sqrt{45t^2-14t+1}}dt$$

Sea $I_1=\int \frac{1-3t}{\sqrt{45t^2-14t+1}}dt$ integral irracional, por lo tanto:

$$\frac{1-3t}{\sqrt{45t^2-14t+1}}=\left(a\sqrt{45t^2-14t+1}\right)'+\frac{m}{\sqrt{45t^2-14t+1}}$$

$$\frac{1-3t}{\sqrt{9t^2-18t+5}}=\frac{a}{2}\frac{90t-14}{\sqrt{45t^2-14t+1}}+\frac{m}{\sqrt{45t^2-14t+1}}\Rightarrow$$

$1-3t=a(45t-7)+m\Rightarrow a=-\dfrac{1}{15},\quad m=\dfrac{8}{15}$. Por lo tanto, sustituyendo estos valores, nos queda: $I_1=-\dfrac{1}{15}\sqrt{45t^2-14t+1}+\dfrac{8}{15}\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{45t^2-14t+1}}$

Sea $I_2=\int \frac{dt}{\sqrt{45t^2-14t+1}}$

Teniendo en cuenta: $ax^2+bx+c=\left(\sqrt{a}x+\dfrac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

$$I_2=\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{45}t-\dfrac{7}{45}\right)^2-\dfrac{4}{45}}}=\frac{\sqrt{45}}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\dfrac{45t-7}{2}\right)^2-1}}=\left\{\begin{array}{l} \dfrac{45t-7}{2}=u \\ dt=\dfrac{2}{45}du \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$I_2=\frac{\sqrt{45}}{2}\int\frac{\frac{2}{45}du}{\sqrt{u^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{45}}\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\left\{\begin{array}{l} u=\dfrac{1}{senv} \\ du=\dfrac{-\cos v}{sen^2 v}dv\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$I_2=\frac{1}{\sqrt{45}}\int\frac{-\cos v/sen^2 v}{\sqrt{\left(1/sen^2 v\right)-1}}dv=-\frac{1}{\sqrt{45}}\int\frac{dv}{senv}=$$

Hacemos el cambio $\left\{\begin{array}{l}\cos v=z\Rightarrow senv=\sqrt{1-z^2} \\ dv=-\dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\end{array}\right\}$, con lo que I_2 se transforma en : $I_2=\dfrac{1}{\sqrt{45}}\displaystyle\int\frac{dz}{1-z^2}$. Descomponiendo ésta en fracciones simples:

$$I_2=\frac{1}{\sqrt{45}}\int\frac{1/2}{1-z}dz+\frac{1}{\sqrt{45}}\int\frac{1/2}{1+z}dz=-\frac{1}{2\sqrt{45}}Ln\left|1-z\right|+\frac{1}{2\sqrt{45}}Ln\left|1+z\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{45}}Ln\frac{\left|1+z\right|}{\left|1-z\right|}+C$$

Para hallar I es necesario deshacer todos los cambios de variable efectuados durante el desarrollo del problema.

$$I_2=\frac{1}{2\sqrt{45}}Ln\frac{\left|1+\cos v\right|}{\left|1-\cos v\right|}+C=\frac{1}{2\sqrt{45}}Ln\frac{\left|1+\sqrt{1-sen^2 v}\right|}{\left|1-\sqrt{1-sen^2 v}\right|}+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{45}}Ln\frac{\left|1+\sqrt{1-1/u^2}\right|}{\left|1-\sqrt{1-1/u^2}\right|}+C=\frac{1}{2\sqrt{45}}Ln\frac{\left|u+\sqrt{u^2-1}\right|}{\left|u-\sqrt{u^2-1}\right|}+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{45}}Ln\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)^2+C=\frac{1}{\sqrt{45}}Ln\left|u+\sqrt{u^2-1}\right|+C$$

$$I_1=-\frac{1}{15}\sqrt{45t^2-14t+1}+\frac{8}{15}\frac{1}{\sqrt{45}}Ln\left|\frac{45t-7}{2}+\sqrt{\left(\frac{45t-7}{2}\right)^2-1}\right|+C$$

$$I=-\frac{1}{2}I_1=\frac{1}{30(2x+3)}\sqrt{(2x+3)^2-14(2x+3)+45}+$$

$$-\frac{4}{15}\frac{1}{\sqrt{45}}Ln\left|\frac{24-14x+\sqrt{(24-14x)^2-4(2x+3)^2}}{2(2x+3)}\right|+C$$

18. Resuelve la integral:

$$I=\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

SOLUCIÓN

Integral irracional, por lo tanto:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\left(a\sqrt{x^2+2x+2}\right)'+\frac{m}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$
$$\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}=a\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\frac{m}{\sqrt{x^2+2x+2}}\Rightarrow$$

$x=a(x+1)+m\Rightarrow a=1,\quad m=-1$ por lo que la integral dada se transforma en:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\sqrt{x^2+2x+2}-\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$$

$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=\left\{\begin{aligned}&x+1=\operatorname{tg}t\\&dx=\left(1+\operatorname{tg}^2 t\right)dt\end{aligned}\right\}=\int\frac{1+\operatorname{tg}^2 t}{\frac{1}{\cos t}}dt=\int\frac{dt}{\cos t}=$$

$$=\left\{\begin{aligned}&\operatorname{sen}t=u\Rightarrow\cos t=\sqrt{1-u^2}\\&dt=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\end{aligned}\right\}=\int\frac{dt}{1-u^2}$$

Descomponiendo esta última integral en fracciones simples obtenemos:

$$\int\frac{dt}{1-u^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+u}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1-u}=\frac{1}{2}Ln\frac{|1+u|}{|1-u|}+C$$

Deshaciendo los cambios de variable realizados en el proceso:

$$I=\frac{1}{2}Ln\frac{|1+\operatorname{sen}t|}{|1-\operatorname{sen}t|}+C=\frac{1}{2}Ln\frac{\left|1+\sqrt{1-\frac{1}{1+(x+1)^2}}\right|}{\left|1-\sqrt{1-\frac{1}{1+(x+1)^2}}\right|}+C=$$

$$=\frac{1}{2}Ln\frac{\left|1+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right|}{\left|1-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right|}+C=\frac{1}{2}Ln\frac{\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|}{\left|x+1-\sqrt{x^2+2x+2}\right|}+C\Rightarrow$$

$$I=\sqrt{x^2+2x+2}-Ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$$

19. Resuelve la integral:

$$I = \int \frac{3x^4 + 4x^2 + 2x + 1}{x\left(x^2 + 1\right)^2} dx$$

SOLUCIÓN

Puesto que el denominador presenta raíces complejas múltiples, aplicamos el método de Hermite para resolver la integral.

$$\frac{3x^4 + 4x^2 + 2x + 1}{x\left(x^2 + 1\right)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{ax + b}{x^2 + 1}\right) + \frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1}$$

$$\frac{3x^4 + 4x^2 + 2x + 1}{x\left(x^2 + 1\right)^2} = \frac{a\left(x^2 + 1\right) - 2x(ax + b)}{\left(x^2 + 1\right)^2} + \frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1} \Rightarrow$$

$$3x^4 + 4x^2 + 2x + 1 = ax^3 + ax - 2ax^3 - 2bx^2 + Ax^4 + 2Ax^2 + A + Mx^4 + \\ + Mx^2 + Nx^3 + Nx$$

Igualando los coeficientes de los términos del mismo grado, llegamos al sistema lineal:

$$\begin{array}{ll} x^4: & 3 = A + M \\ x^3: & 0 = -a + N \\ x^2: & 4 = -2b + 2A + M \\ x\ : & 2 = a + N \\ 1\ : & 1 = A \end{array}$$

Su solución es: $a = 1,\ \ b = 0,\ \ A = 1,\ \ M = 2,\ \ N = 1$

En consecuencia: $I = \dfrac{x}{x^2 + 1} + \displaystyle\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{dx}{x^2 + 1} \Rightarrow$

$$I = \frac{x}{x^2 + 1} + Ln|x| + Ln\left|x^2 + 1\right| + arc.\text{tg}\, x + C$$

20. Resuelve la integral:

$$I=\int x^2 arc.\cos x dx$$

SOLUCIÓN

Aplicamos partes: $\left\{\begin{array}{l} u=arc.\cos x \Rightarrow du=\dfrac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=x^2dx \quad \Rightarrow v=\dfrac{x^3}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$I=\frac{x^3}{3}arc.\cos x+\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Para calcular $\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$ aplicamos un cambio de variable:

$$\left\{\begin{array}{l} 1-x^2=t^2 \Rightarrow x=\sqrt{1-t^2} \\ dx=\dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}dt \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int\frac{\left(1-t^2\right)^{3/2}}{t}\cdot\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt=-\int\left(1-t^2\right)dt=\frac{t^3}{3}-t+C$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}{3}-\sqrt{1-x^2}+C=\sqrt{1-x^2}\left(\frac{1-x^2}{3}-1\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}\left(2+x^2\right)+C$$

Luego:

$$\int x^2arc.\cos x dx=\frac{x^3}{3}arc.\cos x-\frac{1}{9}\sqrt{1-x^2}\left(2+x^2\right)+C$$

21. Resuelve la integral:

$$I = \int Ln(a^2 + x^2)dx$$

SOLUCIÓN

Aplicamos partes: $\left\{ \begin{array}{l} u = Ln(a^2 + x^2) \Rightarrow du = \dfrac{2x}{a^2 + x^2}dx \\ dv = dx \qquad\qquad \Rightarrow v = x \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$I = xLn(a^2 + x^2) - \int \frac{2x^2}{a^2 + x^2}dx$$

$$\int \frac{2x^2}{a^2 + x^2}dx = 2\int \left(1 - \frac{a^2}{a^2 + x^2}\right)dx = 2\int dx - 2\int \frac{dx}{1 + \left(\dfrac{x}{a}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{2x^2}{a^2 + x^2}dx = 2x - 2a \cdot arc.\text{tg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Luego:

$$\int Ln(a^2 + x^2)dx = xLn(a^2 + x^2) - 2x + 2a \cdot arc.\text{tg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$I = xLn(a^2 + x^2) - \int \frac{2x^2}{a^2 + x^2}dx$$

$$\int \frac{2x^2}{a^2 + x^2}dx = 2\int \left(1 - \frac{a^2}{a^2 + x^2}\right)dx = 2\int dx - 2\int \frac{dx}{1 + \left(\dfrac{x}{a}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{2x^2}{a^2 + x^2}dx = 2x - 2a \cdot arc.\text{tg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Luego:

$$\int Ln(a^2 + x^2)dx = xLn(a^2 + x^2) - 2x + 2a \cdot arc.\text{tg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

22. Resuelve la integral:

$$I = \int \frac{x^2 - 2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx$$

SOLUCIÓN

Puesto que el denominador presenta raíces complejas múltiples, aplicamos el método de Hermite para resolver la integral:

$$\frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{mx^3+nx^2+px+q}{x^2\left(x^2+1\right)}\right] + \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+1} =$$

$$\frac{\left(3mx^2+2nx+p\right)x^2\left(x^2+1\right) - \left(mx^3+nx^2+px+q\right)\left[2x\left(x^2+1\right)+x^2 2x\right]}{x^4\left(x^2+1\right)^2} +$$

$$+\frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+1} \Rightarrow$$

$$x^2 - 2 = \left(3mx+2nx+p\right)x\left(x^2+1\right) - \left(mx^3+nx^2+px+q\right)\left[2\left(x^2+1\right)+2x^2\right] +$$
$$+Ax^2\left(x^2+1\right)^2 + (Mx+N)x^3\left(x^2+1\right)$$

Igualando los coeficientes de los términos del mismo grado, llegamos al sistema lineal:

$$\begin{array}{lcl} x^6 & : & 0 = A + M \\ x^5 & : & 0 = N - m \\ x^4 & : & 0 = 2A + M - 2n \\ x^3 & : & 0 = N + m - 3p \\ x^2 & : & 1 = A - 4q \\ x & : & 0 = -p \\ 1 & : & -2 = -2q \end{array}$$

Su solución es: $A = 5,\quad M = -5,\quad N = 0,\quad m = 0,\quad n = \frac{5}{2},\quad p = 0,\quad q = 1$

La integral quedará:

$$\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\frac{5}{2}x^2+1}{x^2\left(x^2+1\right)} + \int \frac{5}{x}\,dx + \int \frac{-5x}{x^2+1}\,dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\frac{5}{2}x^2+1}{x^2\left(x^2+1\right)} + 5Ln|x| - \frac{5}{2}Ln\left|x^2+1\right| + C$$

23. Resuelve la integral:

$$I = \int \frac{x^5 + 4x^3 + 7x - 4}{\left(x^2 + 1\right)^3} dx$$

SOLUCIÓN

Puesto que el denominador presenta raíces complejas múltiples, aplicamos el método de Hermite para resolver la integral:

$$\frac{x^5 + 4x^3 + 7x - 4}{\left(x^2 + 1\right)^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{\left(x^2 + 1\right)^2}\right] + \frac{Ax + B}{x^2 + 1}$$

Derivando y quitando denominadores, llegamos a:

$$x^5 + 4x^3 + 7x - 4 = Ax^5 + (B - a)x^4 + 2(A - b)x^3 + (3a - 3c + 2B)x^2 +$$

$$+ (2b - 4d + A)x + c + B$$

Igualando los coeficientes de los términos del mismo grado, llegamos al sistema lineal:

$$\begin{array}{ll} x^5: & 1 = A \\ x^4: & 0 = B - a \\ x^3: & 4 = 2(A - b) \\ x^2: & 0 = 3a - 3c + 2B \\ x: & 7 = 2b - 4d + A \\ 1: & -4 = c + B \end{array}$$

Su solución es: $A = 1,\ B = -\frac{3}{2},\ a = -\frac{3}{2},\ b = -1,\ c = -\frac{5}{2},\ d = -2$

La integral quedará:

$$I = \frac{-\frac{3}{2}x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x - 2}{\left(x^2 + 1\right)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2 + 1}$$

Finalmente:

$$I = \frac{-3x^3 - 2x^2 - 5x - 4}{2\left(x^2 + 1\right)^2} + \frac{1}{2} Ln\left|x^2 + 1\right| - \frac{3}{2} arc.\text{tg}\, x + C$$

24. Resuelve la integral:

$$I = \int \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{(x-1)^5}\, dx$$

SOLUCIÓN

Descomponiendo en fracciones simples el integrando:

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{(x-1)^5} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{(x-1)^4} + \frac{E}{(x-1)^5} \Rightarrow$$

$$x^3 + x^2 + x + 1 = A(x-1)^4 + B(x-1)^3 + C(x-1)^2 + D(x-1) + E$$

Igualando los coeficientes de los términos del mismo grado, llegamos al sistema lineal:

$$\begin{array}{ll} x^4: & 0 = A \\ x^3: & 1 = -4A + B \\ x^2: & 1 = 6A - 3B + C \\ x\ : & 1 = -4A + 3B - 2C + D \\ 1\ : & 1 = A - B + C - D + E \end{array}$$

Su solución es: $A = 0,\ \ B = 1,\ \ C = 4,\ \ D = 6,\ \ E = 4$

La integral quedará:

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{(x-1)^5}\, dx = \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{4dx}{(x-1)^3} + \int \frac{6dx}{(x-1)^4} + \int \frac{4dx}{(x-1)^5}$$

Luego:

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{(x-1)^5}\, dx = -\frac{1}{(x-1)^4} - \frac{2}{(x-1)^3} - \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + C$$

25. Resuelve la integral:

$$I = \int \frac{x^2}{(x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x)^2}\,dx$$

SOLUCIÓN

Multiplicamos y dividimos por $\cos x$ con lo que la integral dada resulta:
$I = \int \frac{x}{\cos x}\,\frac{x\cos x}{(x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x)^2}\,dx$. Aplicando partes en esta integral:

$$\left.\begin{cases} u = \dfrac{x}{\cos x} \Rightarrow du = \dfrac{\cos x + x\,\mathrm{sen}\,x}{\cos^2 x}\,dx \\ v = \dfrac{x\cos x}{(x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x)^2}\,dx \Rightarrow v = \dfrac{-1}{x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x} \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$I = \frac{x}{\cos x}\cdot\frac{-1}{x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{-x}{\cos x\,(x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x)} + \mathrm{tg}\,x + C$$

26. Resuelve la integral:

$$I = \int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^4 x dx$$

SOLUCIÓN

La integral dada la podemos poner como:

$$I = \int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^4 x dx = \int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x . \cos^2 x dx$$

Utilizando las razones trigonométricas:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \\ \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} \end{array}\right\} \text{ La integral dada se transforma en:}$$

$$I = \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 2x \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{8}\int \left(\operatorname{sen}^2 2x + \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left[\frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}^2 2x\right)\cos 2x \cdot 2\right] dx = \frac{1}{16}\left[x - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{3}\right] + C$$

27. Resuelve la integral:

$$I=\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}{x\left(x^2+1\right)^2}dx$$

SOLUCIÓN

Puesto que el denominador presenta raíces complejas múltiples, aplicamos el método de Hermite para resolver la integral:

$$\frac{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{ax+b}{x^2+1}\right]+\frac{A}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+1}$$

Derivando y quitando denominadores, llegamos a:

$$x^4-2x^3+3x^2-2x+1=A\left(x^2+1\right)^2+Mx^4+Mx^2+Nx^3+Nx+$$
$$+ax^3+ax-2ax^3-2bx^2$$

Igualando los coeficientes de los términos del mismo grado, llegamos al sistema lineal:

$$\begin{array}{ll} x^4: & 1=A+M \\ x^3: & -2=N-a \\ x^2: & 3=2A-2b+M \\ x\ : & -2=N+a \\ 1\ : & 1=A \end{array}$$

Su solución es: $A=1,\ \ M=0,\ \ N=-2,\ \ a=0,\ \ b=-\frac{1}{2}$

La integral quedará:

$$I=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x}+\int\frac{-2\,dx}{x^2+1}=-\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+Ln|x|-2\,arc.\text{tg}\,x+C$$

28. Resuelve la integral:

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x}\, dx$$

SOLUCIÓN

Hacemos el cambio de variable: $\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$
Hemos de tener en cuenta que:
$\cos^3 x dx = \cos^2 x \cos x dx = \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)\cos x dx = \left(1 - t^2\right)dt$

La integral dada se transforma en: $I = \int \frac{1-t^2}{t^3 + t^2 + t}\, dt = \int \frac{1-t^2}{t\left(t^2 + t + 1\right)} dt$

Descomponiendo la última integral en fracciones simples:

$$\frac{1-t^2}{t\left(t^2+t+1\right)} = \frac{A}{t} + \frac{bt+c}{t^2+t+1} \Rightarrow 1 - t^2 = A\left(t^2 + t + 1\right) + (bt + c)t$$

Igualando los coeficientes de los términos del mismo grado, llegamos al sistema lineal:

$$\begin{array}{lcr} t^2: & & -1 = A + b \\ t\ : & & 0 = A + c \\ 1\ : & & 1 = A \end{array}$$

Su solución es: $A = 1, \quad b = -2, \quad c = -1$
La integral quedará:

$$I = \int \frac{dt}{t} + \int \frac{-2t-1}{t^2+t+1} dt = Ln|t| - Ln\left|t^2 + t + 1\right| + C$$

Deshaciendo el cambio de variable que hemos realizado:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x} dx = Ln\frac{|\operatorname{sen} x|}{\left|\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 1\right|} + C$$

29. Resuelve la integral:

$$I = \int \cos^2 x \operatorname{sen} 4x dx$$

SOLUCIÓN

Para resolver la integral vamos a utilizar diferentes razones trigonométricas:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \Rightarrow I = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \operatorname{sen} 4x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 4x dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 4x \cos 2x dx$$

$$\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)\right] \Rightarrow$$

$\operatorname{sen} 4x \cos 2x = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 2x)$. Sustituyendo en la integral:

$$I = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 4x dx + \frac{1}{4}\int \operatorname{sen} 6x dx + \frac{1}{4}\int \operatorname{sen} 2x dx$$

Por lo tanto:

$$I = -\frac{1}{2}\frac{\cos 4x}{4} - \frac{1}{4}\frac{\operatorname{sen} 6x}{6} - \frac{1}{4}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + C$$

30. Resuelve la integral:

$$I=\int \operatorname{sen}2x\cdot\operatorname{sen}3x\cdot\operatorname{sen}4x\,dx$$

SOLUCIÓN

Para resolver la integral vamos a utilizar diferentes razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b=\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}\Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}2x\cdot\operatorname{sen}3x=\frac{\cos(2x-3x)-\cos(2x+3x)}{2}=\frac{\cos x-\cos 5x}{2}$$

Por lo tanto:

$$I=\int\frac{\cos x-\cos 5x}{2}\operatorname{sen}4x\,dx=\frac{1}{2}\int\cos x\operatorname{sen}4x\,dx-\frac{1}{2}\int\cos 5x\operatorname{sen}4x$$

$$\operatorname{sen}a\cdot\cos b=\frac{\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)}{2}\Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}4x\cdot\cos x=\frac{\operatorname{sen}5x+\operatorname{sen}3x}{2}$$

$$\operatorname{sen}4x\cdot\cos 5x=\frac{\operatorname{sen}9x-\operatorname{sen}x}{2}$$

$$\int\cos x\operatorname{sen}4x\,dx=\frac{1}{2}\int\operatorname{sen}5x\,dx+\frac{1}{2}\int\operatorname{sen}3x\,dx=-\frac{1}{2\cdot 5}\cos 5x-\frac{1}{2\cdot 3}\cos 3x+C$$

$$\int\cos 5x\operatorname{sen}4x=\frac{1}{2}\int\operatorname{sen}9x\,dx-\frac{1}{2}\int\operatorname{sen}x\,dx=-\frac{1}{2\cdot 9}\cos 9x+\frac{1}{2}\cos x+C$$

En consecuencia: $I=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 5x}{10}-\frac{\cos 3x}{6}\right]-\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 9x}{18}+\frac{\cos x}{2}\right]+C$

31. Resuelve la integral:

$$I=\int x^2\,\mathrm{sen}(Lnx)dx$$

SOLUCIÓN

Aplicamos partes: $\left\{\begin{array}{ll} u=\mathrm{sen}(Lnx)\Rightarrow du=\dfrac{\cos(Lnx)}{x}dx \\ dv=x^2dx \quad\quad \Rightarrow v=\dfrac{x^3}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow$

$$I=\frac{x^3\,\mathrm{sen}(Lnx)}{3}-\frac{1}{3}\int x^2\cos(Lnx)dx$$

$$I_1=\int x^2\cos(Lnx)dx=\left\{\begin{array}{ll} u=\cos(Lnx)\Rightarrow du=\dfrac{-\mathrm{sen}(Lnx)}{x}dx \\ dv=x^2dx \quad\quad \Rightarrow v=\dfrac{x^3}{3}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{x^3\cos(Lnx)}{3}+\frac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{sen}(Lnx)dx$$

$$I=\frac{x^3\,\mathrm{sen}(Lnx)}{3}-\frac{1}{9}x^3\cos(Lnx)-\frac{1}{9}I\Rightarrow$$

$$I=\frac{9}{10}\left[\frac{x^3\,\mathrm{sen}(Lnx)}{3}-\frac{1}{9}x^3\cos(Lnx)\right]+C=\frac{3x^3}{10}\left[\mathrm{sen}(Lnx)-\frac{1}{3}\cos(Lnx)\right]+C$$

32. Resuelve la integral:

$$I = \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}$$

SOLUCIÓN

Teniendo en cuenta que: $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x$, la integral dada se transforma en: $I = \int \frac{dx}{\cos x}$.

Hacemos el cambio:

$$\left.\begin{cases} \operatorname{sen} x = t \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-t^2} \\ \cos x dx = dt \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{1-t^2}$$

Descomponiendo el integrando de esta integral en fracciones simples:

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} \Rightarrow A = \frac{1}{2},\ \ B = \frac{1}{2}$$

Luego: $I = \int \frac{1/2}{1-t} dt + \int \frac{1/2}{1+t} dt = -\frac{1}{2} Ln|1-t| + \frac{1}{2} Ln|1+t| + C$

Deshaciendo el cambio de variable que hemos realizado:

$$I = \frac{1}{2} Ln \frac{|1+\operatorname{sen} x|}{|1-\operatorname{sen} x|} + C$$

33. Resuelve la integral:

$$I=\int \frac{x-2}{\left(x^2+x+1\right)^2(x-1)}dx$$

SOLUCIÓN

El denominador presenta raíces complejas múltiples, por lo tanto aplicamos el método de Hermite para resolver la integral:

$$\frac{x-2}{\left(x^2+x+1\right)^2(x-1)}=\frac{d}{dx}\left[\frac{ax+b}{\left(x^2+x+1\right)}\right]+\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}$$

$$\frac{x-2}{\left(x^2+x+1\right)^2(x-1)}=\frac{a\left(x^2+x+1\right)-(2x+1)(ax+b)}{\left(x^2+x+1\right)^2}+\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}$$

Si ponemos el denominador común obtenemos:

$$x-2=\left(-ax^2-2bx+a-b\right)(ax+b)+A\left(x^2+x+1\right)^2+$$
$$+(Mx+N)(x-1)\left(x^2+x+1\right)$$

Igualando los coeficientes de los términos del mismo grado, llegamos al sistema lineal:

$$\begin{array}{ll} x^4: & 0=A+M \\ x^3: & 0=2A+N \\ x^2: & 0=-a+3A \\ x: & 1=-2b+2A-M \\ 1: & -2=a-b+A-N \end{array}$$

Su solución es: $A=-\frac{5}{9},\quad M=\frac{5}{9},\quad N=\frac{10}{9},\quad a=-\frac{5}{3},\quad b=-\frac{4}{3}$

La integral quedará:

$$I=\frac{-\frac{5}{3}x-\frac{4}{3}}{x^2+x+1}-\frac{5}{9}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{5}{9}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx$$

$$\int\frac{dx}{x-1}=Ln|x-1|+C$$

$$\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=Ln\left|x^2+x+1\right|+C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{4/3}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\,arc.\text{tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

Sustituyendo estos valores de las diferentes integrales, llegamos a:

$$I = \frac{-\frac{5}{3}x-\frac{4}{3}}{x^2+x+1}-\frac{5}{9}Ln\left|x-1\right|+\frac{5}{18}Ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{5}{3\sqrt{3}}\,arc.\text{tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

34. Resuelve la integral:

$$I=\int \frac{x}{\sqrt{5+x-x^2}}\,dx$$

SOLUCIÓN

Integral del tipo irracional por lo tanto:

$$\frac{x}{\sqrt{5+x-x^2}}=\frac{d}{dx}\left[a\sqrt{5+x-x^2}\right]+\frac{m}{\sqrt{5+x-x^2}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{5+x-x^2}}=\frac{a(1-2x)}{2\sqrt{5+x-x^2}}+\frac{m}{\sqrt{5+x-x^2}}\Rightarrow$$

$$2x=a-2ax+2m\Rightarrow a=-1,\quad m=1/2$$

Con lo cual: $\quad I=-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$

Teniendo en cuenta que:

si $a<0\Rightarrow ax^2+bx+c=-\left(\sqrt{-a}\,x-\frac{b}{2\sqrt{-a}}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5+x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{21}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{2}{\sqrt{21}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{21}}\right)^2}}=$$

$$=arc.\text{sen}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{21}}\right)+C$$

En consecuencia:

$$I=-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{1}{2}arc.\text{sen}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{21}}\right)+C$$

35. Resuelve la integral:

$$I = \int \frac{\operatorname{sen} x \cos^2 x}{1 + 4\cos^2 x} dx$$

SOLUCIÓN

Realizamos el cambio de variable: $\left\{ \begin{array}{l} t = \cos x \Rightarrow \operatorname{sen} x = \sqrt{1-t^2} \\ dx = -\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$I = -\int \frac{t^2\sqrt{1-t^2}}{1+4t^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{1}{4}\int \frac{4t^2}{4t^2+1} dt = -\frac{1}{4}\int \frac{4t^2+1-1}{4t^2+1} dt =$$

$$= -\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(2t)^2+1} + C = -\frac{1}{4}t + \frac{1}{8} arc.\operatorname{tg}(2t) + C \Rightarrow$$

$$I = -\frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{8} arc.\operatorname{tg}(2\cos x) + C$$

36. Resuelve la integral:

$$I = \int arc.\text{sen}\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$$

SOLUCIÓN

Aplicando partes: $\left\{\begin{array}{l} u = arc.\text{sen}\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} \Rightarrow du = \dfrac{dx}{2(x+1)\sqrt{x}} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$I = x arc.\text{sen}\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \left\{\begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array}\right\} = \int \frac{t^2}{(t^2+1)t}2tdt = 2\int \frac{t^2}{t^2+1}dt \Rightarrow$$

$$I_1 = 2\int \frac{t^2+1}{t^2+1}dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2t - 2arc.\text{tg}\, t + C$$

Por lo tanto:

$$I = x arc.\text{sen}\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + arc.\text{tg}\sqrt{x} + C$$

37. Resuelve la integral:

$$I=\int \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{1-5\cos^2 x}\,dx$$

SOLUCIÓN

Haciendo el cambio: $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \Rightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$I=\int \frac{\frac{2t^2}{1+t^2}}{1-\frac{5}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2}=2\int \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)\left(t^2-4\right)}dt$$

Descomponiendo en fracciones simples esta ultima integral:

$$\frac{t^2}{\left(1+t^2\right)\left(t^2-4\right)}=\frac{A}{t-2}+\frac{B}{t+2}+\frac{Mt+N}{t^2+1}\Rightarrow$$

$$t^2=A(t+2)\left(t^2+1\right)+B(t-2)\left(t^2+1\right)+(Mt+N)(t+2)(t-2)$$

si $t=2\Rightarrow 4=A\cdot 4\cdot 5\Rightarrow A=\dfrac{1}{5}$

si $t=-2\Rightarrow 4=B\cdot(-4)\cdot 5\Rightarrow B=-\dfrac{1}{5}$

si $t=0\Rightarrow 0=2A-2B-4N\Rightarrow N=\dfrac{1}{5}$

si $t=1\Rightarrow 1=6A-2B-3(M+N)\Rightarrow M=0$

Sustituyendo estos valores, obtenemos:

$$I=\frac{2}{5}\int\frac{dt}{t-2}-\frac{2}{5}\int\frac{dt}{t+2}+\frac{2}{5}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{2}{5}Ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+\frac{2}{5}arc.\operatorname{tg} t+C$$

Deshaciendo el cambio:

$$I=\frac{2}{5}Ln\left|\frac{\operatorname{tg} x-2}{\operatorname{tg} x+2}\right|+\frac{2}{5}x+C$$

38. Resuelve la integral:

$$I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos^2 x}$$

SOLUCIÓN

Hacemos el cambio de variable: $\left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \Rightarrow \operatorname{sen} x = \sqrt{1-t^2} \\ dx = -\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$I = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-t^2}\cdot t^2} = -\int \frac{dt}{(1-t^2)t^2} = \int \frac{dt}{(t+1)(t-1)t^2}$$

$$\frac{1}{(t+1)(t-1)t^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t} + \frac{D}{t^2} \Rightarrow$$

$$1 = A(t+1)t^2 + B(t-1)t^2 + C(t+1)(t-1)t + D(t+1)(t-1)$$

si $t = 1 \Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow A = \dfrac{1}{2}$

si $t = -1 \Rightarrow 1 = -2B \Rightarrow B = -\dfrac{1}{2}$

si $t = 0 \Rightarrow 1 = -D \Rightarrow D = -1$

si $t = 2 \Rightarrow 1 = 12A + 4B + 6C + 3D \Rightarrow C = 0$

Con estos valores:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t^2} \Rightarrow I = \frac{1}{2} Ln|t-1| - \frac{1}{2} Ln|t+1| + \frac{1}{t} + C$$

Deshaciendo el cambio:

$$I = \frac{1}{2} Ln|\cos x - 1| - \frac{1}{2} Ln|\cos x + 1| + \frac{1}{\cos x} + C$$

39. Resuelve la integral:

$$I=\int \frac{x+(2x-1)^{2/3}}{(2x-1)^{1/2}+1}\,dx$$

SOLUCIÓN

Haciendo el cambio: $\left\{\begin{array}{l} 2x-1=t^6 \Rightarrow x=\dfrac{t^6+1}{2} \\ dx=3t^5dt \end{array}\right\} \Rightarrow$

$I=\int \dfrac{\frac{t^6+1}{2}+t^4}{t^3+1}3t^5dt=\dfrac{3}{2}\int \dfrac{t^{11}+2t^9+t^5}{t^3+1}dt \Rightarrow$ Como el polinomio numerador es de grado mayor al polinomio denominador dividimos y obtenemos:

$$I=\frac{3}{2}\int\left(t^8+2t^6-t^5-2t^3+2t^2+2\right)dt-3\int\frac{t^2+1}{t^3+1}dt$$

Ahora bien: $t^3+1=(t+1)\left(t^2-t+1\right)$. Descomponiendo en fracciones simples la última integral:

$$\frac{t^2+1}{t^3+1}=\frac{A}{t+1}+\frac{Mt+N}{t^2-t+1}=\frac{A\left(t^2-t+1\right)+(Mt+N)(t+1)}{t^3+1}$$

Igualando los coeficientes de los términos del mismo grado, obtenemos el siguiente sistema lineal:

$$\begin{array}{ll} t^2: & 1=A+M \\ t: & 0=-A+M+N \\ 1: & 1=A+N \end{array}$$

Su solución es: $A=\dfrac{2}{3}$, $M=\dfrac{1}{3}$, $N=\dfrac{1}{3}$

Por lo tanto, tenemos:

$$\int\frac{t^2+1}{t^3+1}dt=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t+1}+\frac{1}{3}\int\frac{t+1}{t^2-t+1}dt=$$

$$=\frac{2}{3}Ln|t+1|+\frac{1}{6}\int\frac{2t-1}{t^2-t+1}dt+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2-t+1}dt=$$

$$=\frac{2}{3}Ln|t+1|+\frac{1}{6}Ln\left|t^2-t+1\right|+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2-t+1}dt$$

Teniendo en cuenta que: $ax^2+bx+c=\left(\sqrt{a}x+\dfrac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ si $a>0$

$$\int \frac{1}{t^2 - t + 1} dt = \int \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \int \frac{dt}{\left(\frac{2t - 1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} arc.\text{tg}\left(\frac{2t - 1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$I = \frac{t^9}{6} + \frac{3t^7}{7} - \frac{t^6}{4} - \frac{3}{4}t^4 + t^3 + 3t - 2Ln|t + 1| - \frac{1}{2}Ln|t^2 - t + 1| +$$

$$-\sqrt{3} arc.\text{tg}\left(\frac{2t - 1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Deshaciendo el cambio:

$$I = \frac{(2x-1)^{3/2}}{6} + \frac{3(2x-1)^{7/6}}{7} - \frac{2x-1}{4} - \frac{3}{4}(2x-1)^{2/3} + (2x-1)^{1/2} +$$
$$+3(2x-1)^{1/6} - 2Ln\left|(2x-1)^{1/6} + 1\right| - \frac{1}{2}Ln\left|(2x-1)^{1/3} - (2x-1)^{1/6} + 1\right| +$$
$$-\sqrt{3} arc.\text{tg}\left(\frac{2(2x-1)^{1/6} - 1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

40. Resuelve la integral:

$$I=\int \frac{2+\operatorname{tg}^2 x}{\left(1+\operatorname{tg}^3 x\right)\cos^2 x}\,dx$$

SOLUCIÓN

Hacemos el cambio: $\left\{\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = t \\ \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = dt\end{array}\right\} \Rightarrow I=\displaystyle\int \frac{2+t^2}{\left(1+t^3\right)}dt$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{2+t^2}{\left(1+t^3\right)}=\frac{A}{t+1}+\frac{Mt+N}{t^2-t+1} \Rightarrow 2+t^2 = A\left(t^2-t+1\right)+(Mt+N)(t+1)$$

Igualando los coeficientes de los términos del mismo grado, obtenemos el siguiente sistema lineal:

$$\begin{array}{ll} t^2: & 1=A+M \\ t\ : & 0=-A+M+N \\ 1\ : & 2=A+N \end{array}$$

Su solución es: $A=1,\quad M=0,\quad N=1$

Por lo tanto, tenemos:

$$I=\int\frac{dt}{t+1}+\int\frac{dt}{t^2-t+1}=Ln|t+1|+\int\frac{dt}{t^2-t+1}$$

Teniendo en cuenta que: $ax^2+bx+c=\left(\sqrt{a}x+\dfrac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ si $a>0$

$$\int\frac{1}{t^2-t+1}dt=\int\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\int\frac{dt}{\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}arc.\operatorname{tg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$I=Ln|t+1|+\frac{2}{\sqrt{3}}arc.\operatorname{tg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

Deshaciendo el cambio:

$$I=Ln|1+\operatorname{tg} x|+\frac{2}{\sqrt{3}}arc.\operatorname{tg}\left(\frac{2\operatorname{tg} x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

41. Resuelve la integral:

$$I = \int e^{2x} \operatorname{sen} x dx$$

SOLUCIÓN

Aplicamos partes: $\left.\begin{cases} u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x} dx \\ dv = \operatorname{sen} x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}\right\} \Rightarrow$

$$I = -e^{2x} \cos x + 2\int e^{2x} \cos x dx = \left.\begin{cases} u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x} dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$I = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \operatorname{sen} x - 4I \Rightarrow I = \frac{-e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \operatorname{sen} x}{5} + C$$