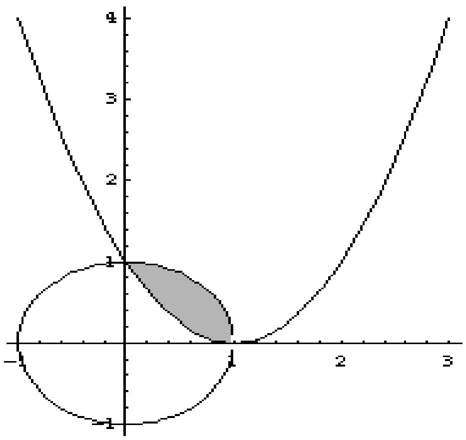
1- Calcula el área de la región plana limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y la parábola $y = (x-1)^2$, que no contiene al origen.

SOLUCIÓN

Dibujamos las curvas para ver el área que se pide.



Calculamos los puntos de corte, para ello debemos resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ y = (x-1)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + (x-1)^4 = 1 \Rightarrow x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$x\left(x^3 - 4x^2 + 7x - 4\right) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x^3 - 4x^2 + 7x - 4 = 0 \end{array}\right.$$

$$x^3 - 4x^2 + 7x - 4 = 0 \Rightarrow (x-1)\left(x^2 - 3x + 4\right) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-16}}{2} \notin \Re \end{array}\right.$$

Los puntos de corte son: $(0,1)$ y el $(1,0)$

El área pedida es: $A = \int_0^1 \left[\sqrt{1-x^2} - (x-1)^2\right] dx$

Calculamos $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ y $\int (x-1)^2 dx$

$$\int (x-1)^2 dx = \frac{(x-1)^3}{3} + C$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} x = \operatorname{sen} t \\ dx = \cos t dt \end{array}\right\} = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2t) dt \Rightarrow$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t + C = \frac{1}{2}arc.\operatorname{sen} x + \frac{1}{4}2x\sqrt{1-x^2} + C$$

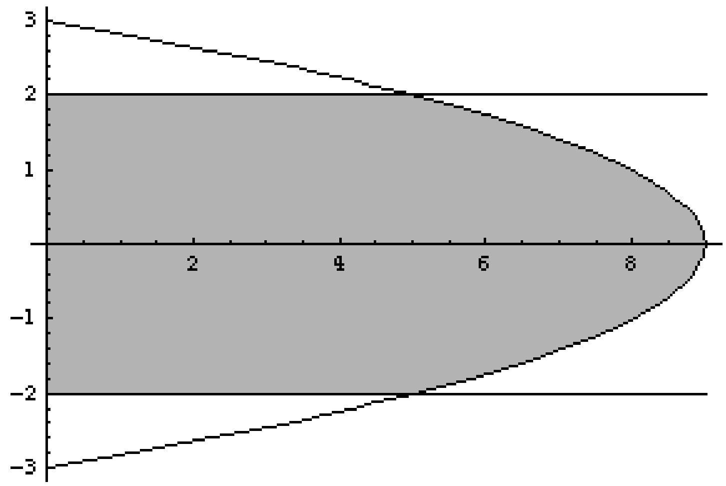
En consecuencia:

$$A = \left[\frac{1}{2}arc.\operatorname{sen} x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$$

2 Calcula el área de la región plana limitada por la parábola $x = 9 - y^2$ y las rectas $x = 0,\ \ y = 2,\ \ y = -2$

SOLUCIÓN

Representamos las curvas dadas:



Calculamos los puntos de corte, para lo cual resolvemos
los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2 \\ x = 9 - y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 9 - 4 = 5 \Rightarrow (5, 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = -2 \\ x = 9 - y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 9 - 4 = 5 \Rightarrow (5, -2)$$

Observando el dibujo podemos calcular el área sobre el eje OY.

El área total será la suma del área del rectángulo más superficie restante, por lo tanto:

$$A = 5 \cdot 4 + \int_{-2}^{2} \left(9 - y^2 - 5\right) dy = 5 \cdot 4 + \int_{-2}^{2} \left(4 - y^2\right) dy \Rightarrow$$

$$A = 20 + \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2} = 20 + \frac{32}{3} = \frac{92}{3}$$

Si calculamos el área sobre el eje OX:

$$A = 5 \cdot 4 + 2\int_{5}^{9} \sqrt{9 - x}\, dx = 20 - 2\left[\frac{(9 - x)^{3/2}}{3/2}\right]_{5}^{9} = \frac{92}{3}$$

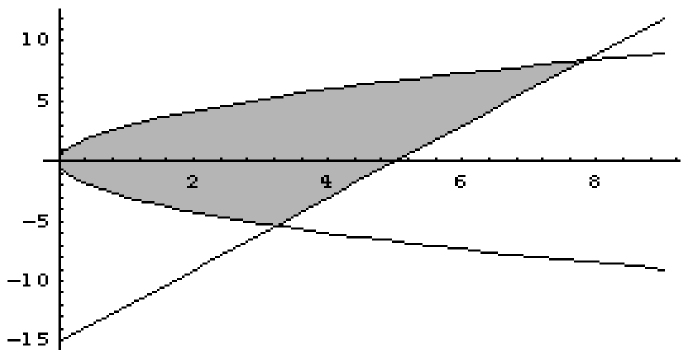
3. Calcula el área del sector parabólico delimitado por la recta que pasa por los puntos $A(10,12)$ y $B(4,-6)$ sobre la parábola $y^2 = 9x$.

SOLUCIÓN

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados:

$$\frac{x-10}{4-10} = \frac{y-12}{-6-12} \Rightarrow 3x-30 = y-12 \Rightarrow y = 3x-18$$

Representamos las curvas:



Hallamos los puntos de corte de las gráficas de las funciones, para ello resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 9x \\ y = 3x-18 \end{array}\right\} \Rightarrow y^2 = 3(y+18) = 3y+54 \Rightarrow y^2 - 3y - 54 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 9 \\ y = -6 \end{cases}$$

Por tanto los puntos de corte serán: $(9,9)$ y el $(4,-6)$

Observando la figura la parte rayada es el área pedida:

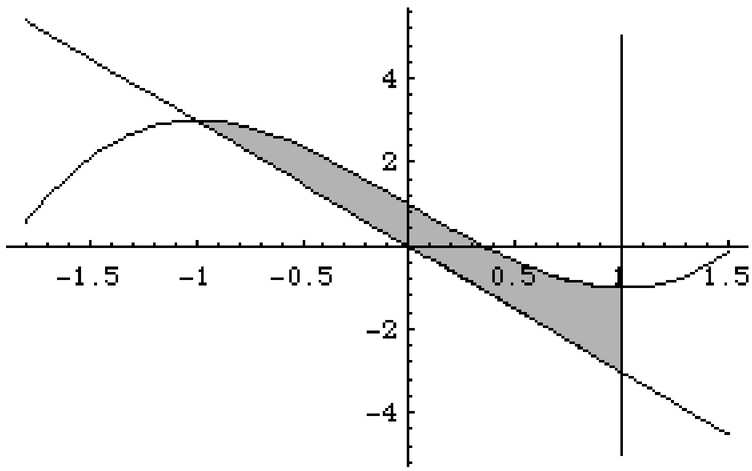
$$A = 2\int_0^4 3\sqrt{x}\,dx + \int_4^9 \left(3\sqrt{x} - 3x + 18\right)dx = 6\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^4 + \left[3\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{3x^2}{2} + 18x\right]_4^9 =$$

$$= 4\cdot 8 + 2\cdot 27 - \frac{243}{2} + 162 - 2\cdot 8 + 24 - 72 = 184 - \frac{243}{2} = \frac{125}{2}$$

4 Dibuja la región limitada por las gráficas de $y = x^3 - 3x + 1$, $y = -3x$, $x = 1$, y calcula el área de dicha región.

SOLUCIÓN

Representamos las rectas dadas sin más que hacer una tabla de valores.
Para representar $y = x^3 - 3x + 1$, sabemos que el dominio es todo $\Re$ y que es continua en todo su dominio. Calculamos los puntos críticos: hallamos su derivada $y' = 3x^2 - 3$, igualamos a cero esta derivada: $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.
Calculamos la segunda derivada: $y'' = 6x$.
$y''(1) = 6 > 0 \Rightarrow$ en el punto $x = 1$ la gráfica presenta un mínimo.
$y''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow$ en el punto $x = -1$ la gráfica presenta un máximo.
Representación:



Para calcular el área de la región rayada, tenemos que calcular los puntos de corte, es decir tenemos que resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 3x + 1 \\ y = -3x \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1,3)$$

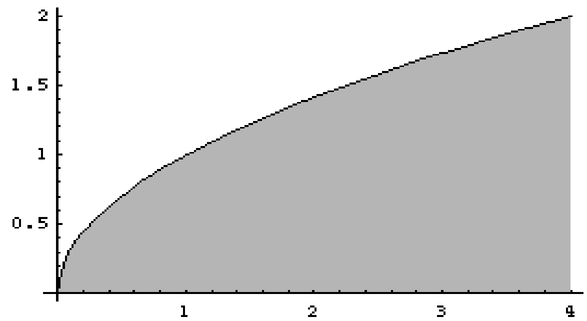
Observando el dibujo, el área pedida será:

$$A = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - 3x + 1 + 3x\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} + x\right]_{-1}^{1} = 2$$

5 Calcula los valores de x en el intervalo $[0,4]$ que dividen en tres partes de igual volumen al sólido generado por la región limitada por $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=4$, al girar alrededor del eje OX.

SOLUCIÓN

Representamos las diferentes funciones:



Dividimos la región rayada en tres partes para lo cual damos a x los valores de: $x=a,\quad x=b$.
Debemos encontrar estos valores teniendo en cuenta que las regiones han de tener el mismo volumen.
El volumen de la parte rayada es:

$$V=\pi\int_0^4 x\,dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4=8\pi$$

El enunciado del problema nos dice que debemos dividir la región en tres partes de igual volumen por lo tanto:

$$8\pi=3\pi\int_0^a x\,dx=3\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a\Rightarrow 8\pi=\frac{3}{2}\pi a^2\Rightarrow a=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

Por otra parte:

$$\pi\int_0^a x\,dx=\pi\int_a^b x\,dx\Rightarrow\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{4/\sqrt{3}}=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{4/\sqrt{3}}^b\Rightarrow\frac{16}{3}=\frac{b^2}{2}\Rightarrow b=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

Los valores de x que cumplen las condiciones del problema son:

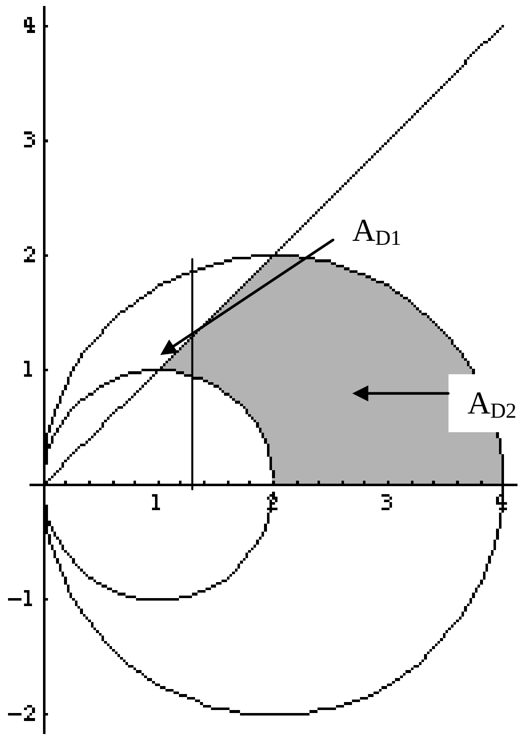
$$x=\frac{4\sqrt{3}}{3},\quad x=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

6 Calcula el área de la región limitada por:

$$x^2+y^2=2x,\qquad x^2+y^2=4x,\qquad y=x,\qquad y=0$$

SOLUCIÓN

Representamos las funciones dadas para delimitar cual es el área pedida:



Hallamos los puntos de corte:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=2x \\ y=x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=x \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow (0,0) \\ x=1 \Rightarrow (1,1) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=4x \\ y=x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=2x \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow (0,0) \\ x=2 \Rightarrow (2,2) \end{array}\right.$$

El área pedida será: $A=A_{D_1}+A_{D_2}$

$$A_{D_2}=\frac{\pi\cdot 2^2}{4}=\pi$$

$$A_{D_1}=\int_1^2\left(x-\sqrt{2x-x^2}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2-\int_1^2\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$$

$$\int_1^2 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x-1=\operatorname{sen} t \\ dx=\cos t\,dt \end{array} \right\} = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt \Rightarrow$$

$$\int_1^2 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx = \left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

Luego: $A_{D_1} = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$

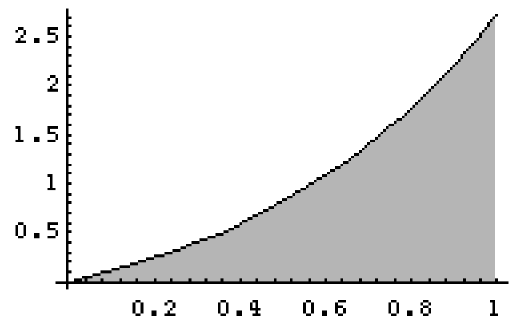
Finalmente: $A = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$

7 La figura limitada por la curva $y = xe^x$ y las rectas $y = 0$, $x = 1$, gira alrededor del eje OX.

Halla el volumen del cuerpo de revolución engendrado.

SOLUCIÓN

Representamos las funciones dadas para observar cual es la región que gira alrededor del eje OX.



Hallamos los puntos de corte, para saber cuales son los limites de integración:

$$\left.\begin{array}{l} y = xe^x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xe^x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$$

Si $x = 1 \Rightarrow y = e \Rightarrow (1, e)$

El volumen será:

$$V = \pi\int_0^1 x^2 e^{2x} dx = \left\{\begin{array}{l} x^2 = u \Rightarrow 2xdx = du \\ e^{2x}dx = dv \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\} = \pi\left[\frac{x^2e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \pi\int_0^1 xe^{2x}dx$$

$$\int_0^1 xe^{2x}dx = \left\{\begin{array}{l} x = u \Rightarrow dx = du \\ e^{2x}dx = dv \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\} = \left[\frac{xe^{2x}}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1$$

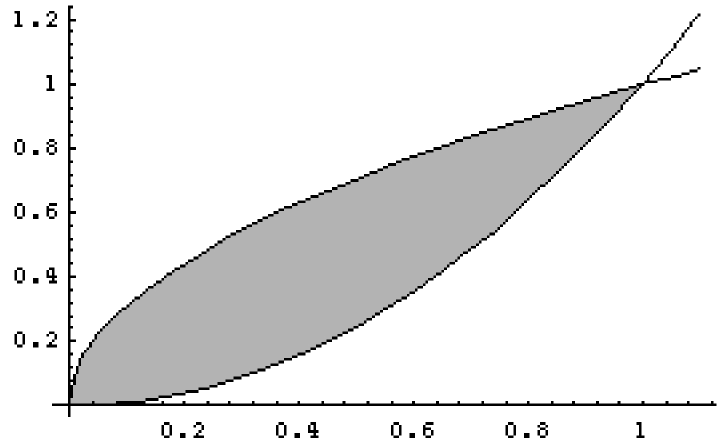
Sustituyendo estos valores obtenemos:

$$V = \pi\frac{e^2}{2} - \pi\frac{e^2}{2} + \frac{\pi}{4}\left(e^2 - 1\right) = \frac{\pi}{4}\left(e^2 - 1\right)$$

8 Halla el volumen engendrado por el área comprendida entre las parábolas $y = x^2, \quad x = y^2$ al girar alrededor del eje OX.

SOLUCIÓN

Representamos las parábolas dadas :



Calculamos los puntos de corte que serán los limites de integración, para lo cual resolvemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ x = y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = x^4 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0) \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (1,1) \end{array}\right.$$

El volumen será:

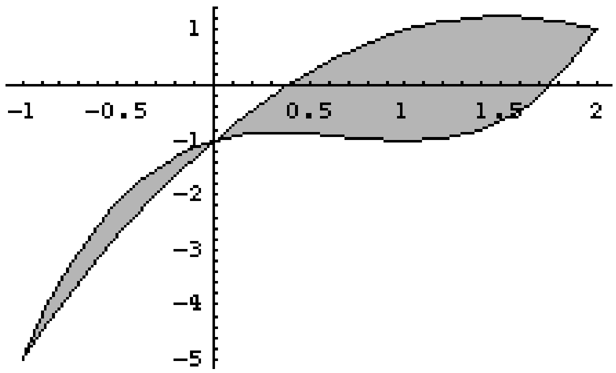
$$V = \pi \int_0^1 \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2 \right] dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{3\pi}{10}$$

9 Calcula el área de la región comprendida entre las curvas:

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ y $g(x) = -x^2 + 3x - 1$

SOLUCIÓN

Representamos las funciones dadas para delimitar cual es el área pedida:



Hallamos los puntos de corte:

$$-x^2 + 3x - 1 = x^3 - 2x^2 + x - 1 \Rightarrow x(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

En el intervalo $(-1,0)$ la gráfica de la curva $g(x)$ va por debajo de la gráfica de la curva $f(x)$.
En el intervalo $(0,2)$ la gráfica de la curva $f(x)$ va por debajo de la gráfica de la curva $g(x)$.
Por lo tanto según lo anterior:

$$A = \int_{-1}^{0} [f(x) - g(x)]dx + \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]dx \Rightarrow$$

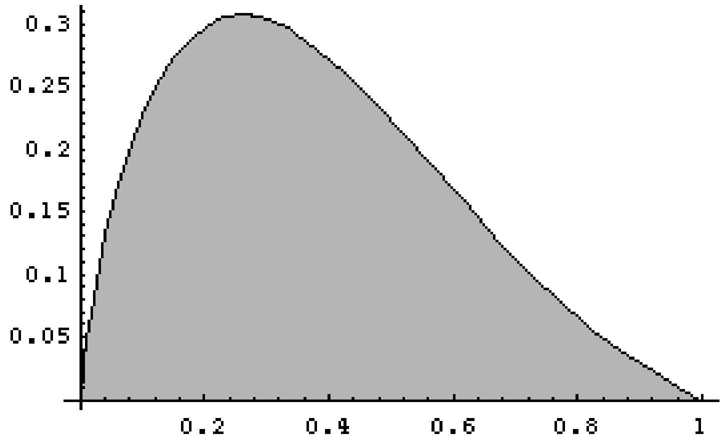
$$A = \int_{-1}^{0} \left[x^3 - x^2 - 2x\right]dx + \int_{0}^{2} \left[-x^3 + x^2 + 2x\right]dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2\right]_{0}^{2} = \frac{37}{12}$$

10 Calcula el área limitada por la curva $y = \dfrac{-xLnx}{\left(x^2+1\right)^2}$, y el eje OX en el semiplano $y \geq 0$

SOLUCIÓN

Representamos $y = \dfrac{-xLnx}{\left(x^2+1\right)^2}$.



El denominador siempre es positivo, por lo tanto $-xLnx \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$

Luego el área es: $A = \int_0^1 \dfrac{-xLnx}{\left(x^2+1\right)^2} dx$

$$\int_0^1 \frac{-xLnx}{\left(x^2+1\right)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = Lnx \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{-x}{\left(x^2+1\right)^2} \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2+1} \end{array} \right\} = \left[\frac{1}{2}\frac{Lnx}{x^2+1}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}$$

Calculamos $\int_0^1 \dfrac{dx}{x\left(x^2+1\right)}$. Para ello descomponemos el integrando en fracciones simples:

$$\frac{1}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+1} \Rightarrow 1 = A\left(x^2+1\right) + Mx^2 + Nx \Rightarrow$$

Su solución es : $A = 1, \quad M = -1, \quad N = 0$.

En consecuencia:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)} = \int_0^1 \frac{dx}{x} - \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1} = \left[Lnx - \frac{1}{2}Ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1$$

Sustituyendo estos valores en A obtenemos:

$$A=\left[\frac{1}{2}\frac{Lnx}{x^2+1}-\frac{1}{2}Lnx+\frac{1}{4}Ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1=\frac{Ln2}{4}-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2+1}-1\right)Lnx=\frac{Ln2}{4}$$

ya que $\lim_{x\to 0}\frac{-x^2 Lnx}{x^2+1}=0$.