Ejercicios propuestos para el cálculo de áreas

1) Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y = \dfrac{x^2}{4}$, las rectas verticales $x = 1$, $x = 3$ y el eje *OX*.

Solución: $A = \dfrac{13}{6}$

2) Calcular el área de la figura limitada entre la curva $y = x(x-2)(x-4)$, las rectas verticales $x = 1$, $x = 3$ y el eje *OX*.

Solución: $A = \dfrac{7}{2}$

3) Calcular el área de la región limitada por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje *OX*.

Solución: $A = \dfrac{32}{3}$

4) Calcular el área de la región limitada por la curva de ecuación $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje *OX*.

Solución: $A = 8$

5) Calcular el área de la figura limitada entre la curva $x = -y^2 - y + 2$, las ordenadas $y = -1$, $y = 0$ y el eje *OY*.

Solución: $A = \dfrac{13}{6}$

6) Calcular el área de la figura limitada por la curva $x = y^2 + 4y$ y el eje *OY*.

Solución: $A = \dfrac{32}{3}$

7) Calcular el área de la figura limitada por las parábolas $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.

Solución: $A = \dfrac{16}{3}$

8) Calcular el área comprendida entre las parábolas $y = 6x - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

Solución: $A = \dfrac{64}{3}$

9) Calcular el área de la superficie limitada por la parábola $y^2 = 2x$, el eje *OX* y las rectas $x = 0$, $x = 1$.

Solución: $A = \dfrac{2}{3}\sqrt{2}$

10) Calcular el área de un círculo de centro el origen y radio R.

Solución: $A = \pi R^2$

11) Calcular el área de la región limitada por la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ y la recta $x = 2a$.

Solución: $A = ab\left(2\sqrt{3} + \mathrm{Log}\left(2 - \sqrt{3}\right)\right)$

12) Calcular el área de la superficie limitada por la curva de ecuación $y = x^2 - 5x + 6$ y el eje *OX*, cuando y es negativo.

Solución: $A = \dfrac{1}{6}$

13) Calcular el área de la superficie comprendida entre la curva de ecuación $y = x^2$ y la recta de ecuación $y = 2x$.

Solución: $A = \dfrac{4}{3}$

14) Hallar el área de la región limitada por las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = x$.

Solución: $A = \dfrac{9}{2}$

15) Calcular el área de la región limitada por la parábolas $x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$.

Solución: $A = \dfrac{4}{3}$

16) Las curvas de las funciones seno y coseno se intersecan infinitas veces, dando lugar a regiones de igual área. Calcular el área de una de dichas regiones.

Solución: $A = 2\sqrt{2}$

17) Calcular el área de la región limitada por las gráficas $x = 3 - y^2$, $y = x - 1$.

Solución: $A = \dfrac{9}{2}$

18) Hallar el área de la figura comprendida entre la curva $y = 4 - x^2$ y el eje *OX*.

Solución: $A = \dfrac{32}{3}$

19) Hallar el área del dominio limitado por una semionda de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ y el eje *OX*.

Solución: $A = 2$

20) Calcular el área de la figura comprendida entre la parábola $y = 2x - x^2$ y la recta $y = -x$.

Solución: $A = \dfrac{9}{2}$

21) Calcular el área de la figura comprendida entre las parábolas $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$ y la recta $y = 2x$.

Solución: $A = 4$

22) Hallar el área de la figura limitada por la curva $y = x^3$, la recta $y = 8$ y el eje *OY*.

Solución: $A = 12$

23) Hallar el área del dominio comprendido entre las parábolas $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$.

Solución: $A = \dfrac{4}{3}p^2$

24) Hallar el área total de la figura limitada por las curvas $y = x^3$, $y = 2x$, $y = x$.

Solución: $A = \dfrac{3}{2}$

25) Calcular el área de la figura limitada por la curva $y^3 = x$, la recta $y = 1$ y la vertical $x = 8$.

Solución: $A = \dfrac{17}{4}$

26) Hallar el área de la figura limitada por la catenaria $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$, los ejes *OX*, *OY* y la recta $x = a$.

Solución: $A = \dfrac{a^2}{2e}\left(e^2 - 1\right)$

27) Calcular el área de la figura limitada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$.

Solución: $A = e + \frac{1}{e} - 2$

28) Calcular el área del recinto formado por los puntos $(x\ ,\ y)$ que verifican: $x^2 + y^2 \leq 36$, $y^2 \geq 9x$.

Solución: $A = 24\pi - 3\sqrt{3}$

29) Calcular el área limitada por las curvas $x^2 + y^2 = 9$, $(x-3)^2 + y^2 = 9$.

Solución: $A = 6\pi - \frac{9}{2}\sqrt{3}$

30) Calcular el área en el primer cuadrante limitada por las curvas $x^2 + y^2 = 3$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $x = \frac{1}{2}y^2$.

Solución: $A = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{2}\left(\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{2}{3}} - \operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

31) Calcular el área encerrada por la curva $y = \frac{-x\operatorname{Log}x}{\left(x^2+1\right)^2}$, el eje *OX*, en el semiplano $y \geq 0$.

Solución: $A = \frac{\operatorname{Log}2}{4}$

32) Calcular el área comprendida entre la curva $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$ y el eje *OX*.

Solución: $A = a^2\pi$

33) Calcular el área comprendida entre la curva $y^2 = \frac{x^2}{1 - x^2}$ y sus asíntotas.

Solución: $A = 4$

34) Tomando un punto $M(x_0, y_0)$ en el primer cuadrante que pertenezca a la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, con $a > b$, demostrar que el sector de la elipse limitado por el semieje mayor y el segmento que va desde el centro geométrico de la elipse hasta el punto M tiene área igual a $A=\frac{ab}{2}\arccos\frac{x_0}{a}=\frac{ab}{2}\operatorname{arcsen}\frac{y_0}{b}$.

35) Hallar el valor del parámetro a para que el recinto limitado por el eje OX y la curva $y=\cos x$, cuando x varía en el intervalo $[0,\pi/2]$, quede dividido en dos partes con la misma área por la curva $y = a\operatorname{sen}x$.

Solución: $a=\frac{3}{4}$

36) Calcular el área de la elipse dada por sus ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\operatorname{sen} t \end{cases}$.

Solución: $A=ab\pi$

37) Calcular el área comprendida entre el eje OX y un arco de la cicloide $\begin{cases} x = a(t-\operatorname{sen}t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$.

Solución: $A=3\pi a^2$

38) Hallar el área de la figura limitada por la hipocicloide $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\operatorname{sen}^3 t \end{cases}$.

Solución: $A=\frac{3}{8}\pi a^2$

39) Hallar el área encerrada por la rosa de tres pétalos $\rho = a\cos 3\theta$.

Solución: $A=\frac{1}{4}\pi a^2$

40) Hallar el área del dominio limitado por un bucle de la curva $\rho = a\,\mathrm{sen}\,2\theta$.

Solución: $A = \frac{1}{8}\pi a^2$

41) Hallar el área del dominio limitado por la curva $\rho = a\cos\theta$.

Solución: $A = \frac{1}{4}\pi a^2$

42) Hallar el área del dominio limitado por la curva $\rho = a\cos 2\theta$.

Solución: $A = \frac{1}{2}\pi a^2$

43) Hallar el área del dominio limitado por la curva $\rho = \cos 3\theta$.

Solución: $A = \frac{\pi}{4}$

44) Hallar el área del dominio limitado por la curva $\rho = a\cos 4\theta$.

Solución: $A = \frac{1}{2}\pi a^2$

45) Calcular el área total del dominio limitado por la cardioide $\rho = a(1-\cos\theta)$.

Solución: $A = \frac{3}{2}\pi a^2$

46) Calcular el área total del dominio limitado por la cardioide $\rho = a(1+\cos\theta)$.

Solución: $A = \frac{3}{2}\pi a^2$

47) Calcular el área encerrada por la curva $\rho = 2+\cos\theta$.

Solución: $A = \frac{9\pi}{2}$

48) Calcular el área común entre la cardioide $\rho = 1 + \cos\theta$ y el círculo $\rho = 3\cos\theta$.

Solución: $A = \frac{5\pi}{4}$

49) Calcular el área encerrada entre las curvas $\rho = 3\,\mathrm{sen}\,\theta$, $\rho = 1 + \cos\theta$.

Solución: $A = \frac{3}{4}\left(\pi - \sqrt{3}\right)$

50) Calcular el área encerrada entre las dos cardioides $\rho = 1 + \cos\theta$, $\rho = 1 - \cos\theta$.

Solución: $A = \frac{3\pi - 8}{2}$