Ejercicios propuestos para el cálculo de volúmenes

1) Calcular el volumen engendrado por la función $y = \operatorname{sen} x$, al girar alrededor del eje *OX*, cuando el valor de *x* varía entre 0 y π.

Solución: $V = \dfrac{\pi^2}{2}$

2) Calcular el volumen engendrado por la función $y = \operatorname{sen} x$, al girar alrededor del eje *OY*, cuando el valor de *x* varía entre 0 y π.

Solución: $V = 2\pi^2$

3) Hallar el volumen del sólido formado al girar la región limitada por la gráfica de la función $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ y el eje *OX*, con $0 \le x \le \pi$, alrededor del eje *OX*.

Solución: $V = 2\pi$

4) Calcular el volumen generado por la rotación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, al girar alrededor del eje *OX*.

Solución: $V = \frac{4\pi ab^2}{3}$

5) Calcular el volumen engendrado por la revolución alrededor del eje *OX* del área plana comprendida entre $y = 2x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$.

Solución: $V = 2.500\pi$

6) Hallar el volumen del sólido formado al girar la región limitada por $y = 2 - x^2$, $y = 1$, alrededor del eje $y = 1$.

Solución: $V = \frac{16\pi}{15}$

7) Calcular el volumen engendrado al girar el círculo $x^2 + (y-8)^2 = 4$, alrededor del eje *OX*.

Solución: $V = 64\pi^2$

8) Calcular el volumen engendrado por el área plana comprendida entre $y = -x^2 - 3x + 6$, $x + y = 3$, al girar alrededor del eje *OX*.

Solución: $V = \frac{1.792\pi}{15}$

9) La figura limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x = 4$ gira alrededor del eje *OX*. Hallar el volumen del cuerpo de revolución engendrado.

Solución: $V = 32\pi$

10) Calcular el volumen engendrado por la revolución alrededor de la recta $y = 16$ del área plana comprendida entre $y = 4x^2$, $x = 0$, $y = 16$.

Solución: $V = \dfrac{4.096\pi}{15}$

11) Calcular el volumen engendrado por la revolución alrededor del eje OY del área plana comprendida entre $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

Solución: $V = \pi\left(1 - \dfrac{1}{e}\right)$

12) Calcular el volumen engendrado al girar la superficie limitada por la parábola semicúbica $y^2 = x^3$, el eje OX y la recta $x = 1$, alrededor del eje OY.

Solución: $V = \dfrac{4\pi}{7}$

13) El segmento de la recta que une el origen de coordenadas con el punto (a,b) gira alrededor del eje OY. Hallar el volumen del cono engendrado.

Solución: $V = \dfrac{\pi}{3}a^2 b$

14) El área limitada por las curvas $y^2 = 2px$, $x = a$, gira alrededor del eje OX. Hallar el volumen del cuerpo de revolución engendrado.

Solución: $V = \pi p a^2$

15) La figura limitada por la curva $y = xe^x$ y las rectas $y = 0$, $x = 1$, gira alrededor del eje OX. Hallar el volumen del cuerpo de revolución engendrado.

Solución: $V = \dfrac{\pi}{4}\left(e^2 - 1\right)$

16) La figura limitada por la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ gira alrededor del eje OX. Hallar el volumen del cuerpo de revolución engendrado.

Solución: $V = \dfrac{32}{105}\pi a^3$

17) Calcular el volumen del elipsoide de revolución $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\operatorname{sen} t \end{cases}$, al girar alrededor del semieje mayor ($a > b$).

Solución: $V = \dfrac{4}{3}\pi a b^2$

18) La figura limitada por un arco de la cicloide $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ y el eje OX gira alrededor del eje OX. Hallar el volumen del cuerpo de revolución engendrado.

Solución: $V = 5\pi^2 a^3$

19) La figura limitada por un arco de la cicloide $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ y el eje OX gira alrededor del eje OY. Hallar el volumen del cuerpo de revolución engendrado.

Solución: $V = 6\pi^3 a^3$

20) La figura limitada por un arco de la cicloide $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ y el eje OX gira alrededor de una recta que es paralela al eje OY y pasa por el vértice de la cicloide. Hallar el volumen del cuerpo de revolución engendrado.

Solución: $V = \dfrac{\pi a^3}{6}\left(9\pi^2 - 16\right)$

21) La figura limitada por un arco de la cicloide $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ y el eje OX gira alrededor de una recta que es paralela al eje OX y pasa por el vértice de la cicloide. Hallar el volumen del cuerpo de revolución engendrado.

Solución: $V = 7\pi^2 a^3$