

Ejercicios resueltos

2.2-1 Calcula el producto de matrices $A \cdot B$ siendo A y B:

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad A = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Solución

$$a) \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d) \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.2-2 Calcula $(A \cdot B)^T$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Solución

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow (A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

2.2-3 Una fábrica produce n artículos y tiene m clientes. El resumen mensual de ventas se anota en una matriz, donde cada cliente dispone de un vector fila cuyas componentes indican las cantidades adquiridas de cada artículo. Así, a_{ij} indicará que el cliente i ha adquirido a_{ij} unidades del artículo j .

a) Supongamos que la matriz de ventas de Enero ha sido la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Interpreta el significado de dicha matriz.

b) Sabemos que durante el mes de Febrero se han realizado las siguientes ventas: el primer cliente ha comprado 5 unidades del primer artículo, 2 del segundo y 3 del tercero; el segundo cliente, 6 unidades de cada uno; el tercero sólo 4 unidades del primer artículo y el cuarto no ha comprado nada. Construye la matriz de ventas de Febrero. Halla las ventas conjuntas de Enero y Febrero.

c) Supongamos que las ventas de Febrero han duplicado a las de Enero, y las de Marzo han cuadruplicado a las de Febrero. Halla el total de ventas en el primer trimestre.

d) Sea \mathbf{a} la fila correspondiente a un cierto cliente y \mathbf{p} la columna de precios de los artículos. Estudia si tienen alguna interpretación práctica los productos \mathbf{ap} y \mathbf{pa} .

Solución

a)

$$\begin{array}{c} \text{clientes} \rightarrow \\ \begin{matrix} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \rightarrow \text{articulos} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix} & = \mathbf{E} \end{matrix} \end{array}$$

1^{er} cliente compra: 9 unidades del artículo A, 5 del B, 2 del C

2^o cliente compra: 3 unidades del artículo A, 8 del B.

3^o cliente no compra nada

4^o cliente compra: 6 unidades del artículo A, 7 del B y devuelve 1 del C

b) Llamaremos \mathbf{F} a la matriz de ventas de febrero:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{E} + \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 5 \\ 9 & 14 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Llamaremos \mathbf{F} a la matriz de ventas de febrero y \mathbf{M} a la de marzo

Si $\left. \begin{array}{l} \mathbf{F} = 2\mathbf{E} \\ \mathbf{M} = 4\mathbf{F} \end{array} \right\} \Rightarrow$ el total de ventas del primer trimestre, \mathbf{T} , será:

$$\mathbf{T} = \mathbf{E} + \mathbf{F} + \mathbf{M} = \mathbf{E} + 2\mathbf{E} + 8\mathbf{E} = 11\mathbf{E}$$

$$\mathbf{T} = 11 \cdot \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 \mathbf{a}_{ij} = 11 \cdot (9 + 5 + 2 + 3 + 8 + 6 + 7 - 1) = 11 \cdot 39 = 429$$

artículos vendidos en el primer trimestre.

- d) $a \cdot p \equiv$ lo que gasta en el total de compras
 $p \cdot a \equiv$ no tiene ninguna interpretación práctica

Ejemplo:

Si $a = (9 \ 5 \ 2)$ primer cliente y $p = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$ precios de los artículos A, B, C

$$a \cdot p = (9 \ 5 \ 2) \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = 90 + 100 + 60 = 250 \text{ unidades monetarias}$$

$$p \cdot a = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} (9 \ 5 \ 2) = \begin{pmatrix} 90 & 50 & 20 \\ 180 & 100 & 40 \\ 270 & 150 & 60 \end{pmatrix}$$

2.2-4 Una fábrica de coches produce tres modelos: monovolumen (mo), de lujo (lu) y económico (ec). Cada coche necesita las cantidades de cada uno de los siguientes conceptos, relacionados en la matriz C , en unidades convenientemente elegidas: materiales (m), personal (p), impuestos (i) y transporte (t).

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & p & i & t \end{matrix} \\ \begin{matrix} mo \\ lu \\ ec \end{matrix} & \begin{pmatrix} 7 & 10 & 5 & 2 \\ 8 & 9 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}; P = (60 \ 40 \ 90); V = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ p \\ i \\ t \end{matrix}$$

La matriz P indica la producción semanal y la matriz V el valor de una unidad de cada concepto. Obténgase las matrices que representan lo siguiente:

- Las unidades semanales necesarias de cada concepto.
- Los costes de un coche de cada modelo.
- El coste total de la producción semanal.

Solución

a) Las unidades semanales necesarias de cada concepto se obtendrán al multiplicar la producción por lo que necesita cada coche, es decir: $P \cdot C$

$$P \cdot C = (60 \quad 40 \quad 90) \begin{pmatrix} 7 & 10 & 5 & 2 \\ 8 & 9 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1.190 \quad 1.590 \quad 600 \quad 330)$$

unidades semanales

b) Los costes de un coche de cada modelo serán los conceptos que se necesitan por el valor de cada uno de los conceptos, es decir: $C \cdot V$

$$C \cdot V = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 5 & 2 \\ 8 & 9 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 224 \\ 202 \\ 146 \end{pmatrix} \begin{matrix} mo \\ lu \\ ec \end{matrix} \text{ costes de un coche de cada}$$

modelo.

c) El coste total de la producción semanal será la producción por el coste de un coche de cada modelo, es decir: $P \cdot C \cdot V$

$$P \cdot C \cdot V = (60 \quad 40 \quad 90) \begin{pmatrix} 224 \\ 202 \\ 146 \end{pmatrix} = 13.440 + 8.080 + 13.140 = 34.660 \text{ unidades}$$

monetarias.

2.2-5 Calcula la inversa de las siguientes matrices por el método de eliminación de Gauss:

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e) E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 - F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 - F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & | & 1 & 0 \\ 3 & 4 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightarrow \frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & | & 1/2 & 0 \\ 3 & 4 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & | & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & | & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 + 3F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -4 & 3 \\ 0 & -1/2 & | & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow -2F_2} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -4 & 3 \\ 0 & 1 & | & 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$d) D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - F_1} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & | & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 + 2F_4} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 \rightarrow F_4 - 2F_3} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_1 + 3F_4} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 + F_4} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + F_4} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 3 & -6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_1 - 2F_2 \\ \rightarrow \\ F_4 \rightarrow -F_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow D^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$e) E = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ \rightarrow \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_3 \rightarrow F_3 - 3F_2 \\ \rightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_3 \leftrightarrow F_4 \\ \rightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 5 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_4 \rightarrow F_4 - 7F_3 \\ \rightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 & -3 & 1 & -7 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_1 + F_4 \\ \rightarrow \\ F_2 \rightarrow F_2 - 2F_4 \\ F_3 \rightarrow F_3 + F_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 6 & -3 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -12 & 7 & -2 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 & -3 & 1 & -7 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_1 - F_3 \\ \rightarrow \\ F_2 \rightarrow F_2 + 2F_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 & -3 & 1 & -7 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_1 + 3F_2 \\ \rightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 & -3 & 1 & -7 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2 \rightarrow -F_2 \\ \rightarrow \\ F_4 \rightarrow -F_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 & 7 \end{array} \right) \Rightarrow E^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 5 & -3 & 1 & -6 \\ -5 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

2.2-6 Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -17 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c) C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución

$$a) \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -17 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 17 & 1 \\ 0 & -17 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 17 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}(A) = 2$$

$$b) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 4F_1 \\ F_4 \rightarrow F_4 + F_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}(B) = 1$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_2 \rightarrow F_2 + F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + 3F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}(C) = 3$$

2.2-7 Calcula el rango de A , B , C según los valores del parámetro:

$$a) A = \begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2(m+1) & m+1 \end{pmatrix} \quad b) B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad c) C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -a \\ 2 & 6 & -2a \\ 1 & 3 & a+1 \end{pmatrix}$$

Solución

$$a) A = \begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2(m+1) & m+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 2 & m & 2 \\ m-2 & 2 & -1 \\ 2m & 2(m+1) & m+1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{F_2 \rightarrow F_2 - \frac{1}{2}(m-2)F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - mF_1}} \begin{pmatrix} 2 & m & 2 \\ 0 & 2 - \frac{m}{2}(m-2) & -1 - (m-2) \\ 0 & 2(m+1) - m^2 & 1 - m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & m & 2 \\ 0 & \frac{-m^2}{2} + m + 2 & 1 - m \\ 0 & -m^2 + 2m + 2 & 1 - m \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 2 & m & 2 \\ 0 & \frac{-m^2}{2} + m + 2 & 1 - m \\ 0 & \frac{-m^2}{2} + m & 0 \end{pmatrix}$$

$$i) \text{ Si } \frac{-m^2}{2} + m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{rango}(A) \leq 2$$

Si $m = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}(A) = 2$$

Si $m = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}(A) = 2$$

$$ii) \text{ Si } \frac{-m^2}{2} + m \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(A) \geq 2$$

$$\bullet \text{ Si } \frac{-m^2}{2} + m + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 + \sqrt{5} \\ m = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \pm \sqrt{5} & 2 \\ 0 & 0 & 1 - (1 \pm \sqrt{5}) \\ 0 & \neq 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}(A) = 3$$

$$\bullet) \text{ Si } m=1 \Rightarrow A \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}(A) = 2$$

Resumen

$$\text{Si } m = 0, 2, 1 \Rightarrow \text{rango}(A) = 2$$

$$\text{Si } m \neq 0, 2, 1 \Rightarrow \text{rango}(A) = 3$$

$$b) B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_2 \rightarrow F_2 - aF_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + F_2}$$

$$\xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & -a^2 - a + 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$i) \text{ Si } a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$\bullet) \text{ Si } a = 1 \Rightarrow B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}(B) = 1$$

$$\bullet) \text{ Si } a = -2 \Rightarrow B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango}(B) = 2$$

$$ii) \text{ Si } a \neq 1, -2 \Rightarrow \text{rango}(B) = 3$$

$$c) C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -a \\ 2 & 6 & -2a \\ 1 & 3 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & a+1 \\ 2 & 6 & -2a \\ 3 & 4 & -a \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & a+1 \\ 0 & 0 & -4a-2 \\ 0 & -5 & -4a-3 \end{pmatrix}$$

$$i) \text{ Si } a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{rango}(C) = 2$$

$$ii) \text{ Si } a \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{rango}(C) = 3$$