Ejercicios resueltos

2.3-1 Calcula los determinantes de las siguientes matrices de orden dos:

$a)\ A=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ $f)\ A=\begin{pmatrix}-5 & -1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$

$b)\ A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -1 & 5\end{pmatrix}$ $g)\ A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

$c)\ A=\begin{pmatrix}5 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ $h)\ A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -5 & 3\end{pmatrix}$

$d)\ A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & -4\end{pmatrix}$ $i)\ A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 4 & 2\end{pmatrix}$

$e)\ A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 8 & 2\end{pmatrix}$ $j)\ A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & 6\end{pmatrix}$

Solución

$a)\ A=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 2 & -3\end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}-3 & -4\\ 2 & -3\end{vmatrix}=(-3)\cdot(-3)-[(-4)\cdot(2)]=9-(-8)=9+8=17$$

$b)\ A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -1 & 5\end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -1 & 5\end{vmatrix}=(-2)\cdot(5)-[(0)\cdot(-1)]=-10-(0)=-10$$

$c)\ A=\begin{pmatrix}5 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}5 & -1\\ -2 & 3\end{vmatrix}=(5)\cdot(3)-[(-1)\cdot(-2)]=15-(2)=13$$

$$d)\quad A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & -4\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & -4\end{vmatrix}=(2)\cdot(-4)-\left[(-3)\cdot(5)\right]=-8-(-15)=-8+15=7$$

$$e)\quad A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 8 & 2\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & 1\\ 8 & 2\end{vmatrix}=(4)\cdot(2)-\left[(1)\cdot(8)\right]=8-(8)=0$$

$$f)\quad A=\begin{pmatrix}-5 & -1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}-5 & -1\\ -2 & -3\end{vmatrix}=(-5)\cdot(-3)-\left[(-1)\cdot(-2)\right]=15-(2)=13$$

$$g)\quad A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}=(2)\cdot(3)-\left[(0)\cdot(0)\right]=6-0=6$$

$$h)\quad A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -5 & 3\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -5 & 3\end{vmatrix}=(-1)\cdot(3)-\left[(0)\cdot(-5)\right]=-3-0=-3$$

$$i)\quad A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 4 & 2\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & -2\\ 4 & 2\end{vmatrix}=(4)\cdot(2)-\left[(-2)\cdot(4)\right]=8-(-8)=8+8=16$$

$$j)\quad A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 3\\ 0 & 6\end{vmatrix}=(0)\cdot(6)-\left[(3)\cdot(0)\right]=0-(0)=0$$

2.3-2 Calcula los determinantes de las siguientes matrices de orden tres utilizando la regla de Sarrus:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}3&2&1\\5&-2&-3\\-2&4&4\end{pmatrix}\qquad e)\ A=\begin{pmatrix}1&1&2\\3&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$$

$$b)\ A=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&1&-2\\3&5&3\end{pmatrix}\qquad f)\ A=\begin{pmatrix}-1&3&-2\\0&-1&2\\1&4&2\end{pmatrix}$$

$$c)\ A=\begin{pmatrix}4&1&2\\3&0&1\\2&-1&4\end{pmatrix}\qquad g)\ A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\-1&-2&5\end{pmatrix}$$

$$d)\ A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&-3&-2\\0&4&1\end{pmatrix}\qquad h)\ A=\begin{pmatrix}0&1&-5\\0&2&-7\\0&3&6\end{pmatrix}$$

Solución

$$a)\ A=\begin{pmatrix}3&2&1\\5&-2&-3\\-2&4&4\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}3&2&1\\5&-2&-3\\-2&4&4\end{vmatrix}=\left[(3)\cdot(-2)\cdot(4)+(5)\cdot(4)\cdot(1)+(-3)\cdot(-2)\cdot(2)\right]-$$
$$-\left[(1)\cdot(-2)\cdot(-2)+(4)\cdot(-3)\cdot(3)+(5)\cdot(2)\cdot(4)\right]$$

$$|A|=[-24+20+12]-[4-36+40]=8-8=0$$

$$b)\ A=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&1&-2\\3&5&3\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}-1&2&0\\0&1&-2\\3&5&3\end{vmatrix}=\left[(-1)\cdot(1)\cdot(3)+(0)\cdot(0)\cdot(5)+(-2)\cdot(2)\cdot(3)\right]-$$
$$-\left[(0)\cdot(1)\cdot(3)+(5)\cdot(-2)\cdot(-1)+(2)\cdot(0)\cdot(3)\right]$$

$$|A|=[-3+0-12]-[0+10+0]=-15-10=-25$$

c) $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}=\left[(4)\cdot(0)\cdot(4)+(-1)\cdot(2)\cdot(3)+(1)\cdot(1)\cdot(2)\right]-$$
$$-\left[(2)\cdot(0)\cdot(2)+(-1)\cdot(1)\cdot(4)+(1)\cdot(3)\cdot(4)\right]$$

$$|A|=[0-6+2]-[0-4+12]=-4-8=-12$$

d) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -3 & -2\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -3 & -2\\ 0 & 4 & 1\end{vmatrix}=\left[(1)\cdot(-3)\cdot(1)+(4)\cdot(-1)\cdot(0)+(2)\cdot(-2)\cdot(0)\right]-$$
$$-\left[(0)\cdot(-3)\cdot(0)+(4)\cdot(-2)\cdot(1)+(-1)\cdot(2)\cdot(1)\right]$$

$$|A|=[-3+0+0]-[0-8-2]=-3-(-10)=-3+10=7$$

e) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=\left[(1)\cdot(0)\cdot(0)+(1)\cdot(2)\cdot(3)+(1)\cdot(1)\cdot(2)\right]-$$
$$-\left[(2)\cdot(0)\cdot(2)+(1)\cdot(1)\cdot(1)+(3)\cdot(1)\cdot(0)\right]$$

$$|A|=[0+6+2]-[0+1+0]=8-1=7$$

f) $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}=\left[(-1)\cdot(-1)\cdot(2)+(4)\cdot(0)\cdot(-2)+(3)\cdot(2)\cdot(1)\right]-$$
$$-\left[(-2)\cdot(-1)\cdot(1)+(4)\cdot(2)\cdot(-1)+(0)\cdot(2)\cdot(3)\right]$$

$$|A|=[2+0+6]-[2-8+0]=8-(-6)=8+6=14$$

g) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix}=\left[(1)\cdot(4)\cdot(5)+(-2)\cdot(2)\cdot(3)+(6)\cdot(2)\cdot(-1)\right]-$$
$$-\left[(3)\cdot(4)\cdot(-1)+(-2)\cdot(6)\cdot(1)+(2)\cdot(2)\cdot(5)\right]$$

$$|A|=[20-12-12]-[-12-12+20]=-4-(-4)=-4+4=0$$

h) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}=\left[(0)\cdot(2)\cdot(6)+(3)\cdot(0)\cdot(-5)+(-7)\cdot(1)\cdot(0)\right]-$$
$$-\left[(-5)\cdot(2)\cdot(0)+(3)\cdot(-7)\cdot(0)+(6)\cdot(0)\cdot(1)\right]$$

$$|A|=[0+0+0]-[0+0+0]=0-0=0$$

2.3-3 Calcula los determinantes de las siguientes matrices desarrollando por una fila o columna:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}1&3&2\\6&5&4\\9&7&8\end{pmatrix} \qquad b)\ A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&0\\9&-1&0\end{pmatrix}$$

$$c)\ A=\begin{pmatrix}1&3&1\\5&4&2\\1&0&1\end{pmatrix} \qquad d)\ A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\3&-1&1\\0&2&0\end{pmatrix}$$

$$e)\ A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\3&0&0&1\\0&2&1&0\\-1&2&3&1\end{pmatrix} \qquad f)\ A=\begin{pmatrix}-1&3&0&-2\\0&-2&3&2\\1&0&4&2\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$g)\ A=\begin{pmatrix}-1&0&-1&1\\2&1&0&1\\0&0&1&1\\3&-2&0&2\end{pmatrix} \qquad h)\ A=\begin{pmatrix}3&-1&2&4\\-1&1&0&-3\\-5&4&1&2\\2&-2&0&6\end{pmatrix}$$

Solución

$$a)\ A=\begin{pmatrix}1&3&2\\6&5&4\\9&7&8\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&3&2\\6&5&4\\9&7&8\end{vmatrix}\overset{1^a\ fila}{=}(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}5&4\\7&8\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot 3\cdot\begin{vmatrix}6&4\\9&8\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}6&5\\9&7\end{vmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}5&4\\7&8\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}6&4\\9&8\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}6&5\\9&7\end{vmatrix}=[40-28]-3\cdot[48-36]+2\cdot[42-45]$$

$$|A|=12-36-6=-30$$

b) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 9 & -1 & 0\end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 9 & -1 & 0\end{vmatrix}\overset{3^a\ \textit{columna}}{=}(-1)^{1+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 9 & -1\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\cdot 0\cdot A_{23}+(-1)^{3+3}\cdot 0\cdot A_{33}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 9 & -1\end{vmatrix}=[-3-9]=-12$$

c) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 5 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 5 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}\overset{3^a\ \textit{fila}}{=}(-1)^{3+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}+(-1)^{3+2}\cdot 0\cdot A_{32}+(-1)^{3+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 5 & 4\end{vmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 3\\ 5 & 4\end{vmatrix}=[6-4]+[4-15]=2-11=-9$$

d) $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}\overset{3^a\ \textit{fila}}{=}(-1)^{3+1}\cdot 0\cdot A_{31}+(-1)^{3+2}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\cdot 0\cdot A_{33}$$

$$|A|=-2\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-2\cdot[3-3]=0$$

$$e)\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{3^a\ fila}{=} (-1)^{3+1}\cdot 0\cdot A_{31}+(-1)^{3+2}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+3}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{3+4}\cdot 0\cdot A_{34}$$

$$|A|=-2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-2\cdot\{[0+18-1]-[0+3+3]\}+$$

$$+\{[0+12-2]-[0+2+6]\}=-2\cdot(11)+2=-22+2=-20$$

$$f)\quad A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{4^a\ fila}{=} (-1)^{4+1}\cdot 0\cdot A_{41}+(-1)^{4+2}\cdot 0\cdot A_{42}+$$

$$+(-1)^{4+3}\cdot 0\cdot A_{43}+(-1)^{4+4}\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A|=-\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}=-\{[8+0+9]-[0+0+0]\}=-17$$

$$g)\quad A=\begin{pmatrix}-1&0&-1&1\\2&1&0&1\\0&0&1&1\\3&-2&0&2\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}-1&0&-1&1\\2&1&0&1\\0&0&1&1\\3&-2&0&2\end{vmatrix}\overset{2^{a}\ \textit{columna}}{=}(-1)^{1+2}\cdot 0\cdot A_{12}+(-1)^{2+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}-1&-1&1\\0&1&1\\3&0&2\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+2}\cdot 0\cdot A_{32}+(-1)^{4+2}\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix}-1&-1&1\\2&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}-1&-1&1\\0&1&1\\3&0&2\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}-1&-1&1\\2&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}$$

$$|A|=\left[(-2-3)-(3+0+0)\right]-2\cdot\left[(0+2+0)-(0-1-2)\right]=-8-10=-18$$

$$h)\quad A=\begin{pmatrix}3&-1&2&4\\-1&1&0&-3\\-5&4&1&2\\2&-2&0&6\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}3&-1&2&4\\-1&1&0&-3\\-5&4&1&2\\2&-2&0&6\end{vmatrix}\overset{3^{a}\ \textit{columna}}{=}(-1)^{1+3}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}-1&1&-3\\-5&4&2\\2&-2&6\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\cdot 0\cdot A_{23}+$$

$$+(-1)^{3+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}3&-1&4\\-1&1&-3\\2&-2&6\end{vmatrix}+(-1)^{4+3}\cdot 0\cdot A_{43}$$

$$|A|=2\cdot\begin{vmatrix}-1&1&-3\\-5&4&2\\2&-2&6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&-1&4\\-1&1&-3\\2&-2&6\end{vmatrix}$$

$$|A|=2\cdot\left[(-24-30+4)-(-24+4-30)\right]+\left[(18+8+6)-(8+18+6)\right]=0$$

2.3-4 Calcula la inversa por determinantes de las siguientes matrices:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}\qquad b)\ A=\begin{pmatrix}-1&2\\-3&4\end{pmatrix}\qquad c)\ A=\begin{pmatrix}0&-1&3\\-2&3&0\\-5&-3&2\end{pmatrix}$$

Solución

$$a)\ A=\begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}3&4\\5&2\end{vmatrix}=6-20=-14$$

$$\left.\begin{array}{ll}A_{11}=|2|=2 & A_{21}=-|4|=-4\\ A_{12}=-|5|=-5 & A_{22}=|3|=3\end{array}\right\}\Rightarrow Adj\left(A^T\right)=\begin{pmatrix}2&-4\\-5&3\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adj\left(A^T\right)=\frac{1}{-14}\cdot\begin{pmatrix}2&-4\\-5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/7&2/7\\5/14&-3/14\end{pmatrix}$$

$$b)\ A=\begin{pmatrix}-1&2\\-3&4\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}-1&2\\-3&4\end{vmatrix}=-4+6=2$$

$$\left.\begin{array}{ll}A_{11}=|2|=4 & A_{21}=-|2|=-2\\ A_{12}=-|-3|=3 & A_{22}=|-1|=-1\end{array}\right\}\Rightarrow Adj\left(A^T\right)=\begin{pmatrix}4&-2\\3&-1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adj\left(A^T\right)=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4&-2\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\3/2&-1/2\end{pmatrix}$$

$$c)\ A=\begin{pmatrix}0&-1&3\\-2&3&0\\-5&-3&2\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}0&-1&3\\-2&3&0\\-5&-3&2\end{vmatrix}=0+18+0-(-45+0+4)=59$$

$$\left.\begin{array}{lll}A_{11}=\begin{vmatrix}3&0\\-3&2\end{vmatrix}=6 & A_{21}=-\begin{vmatrix}-1&3\\-3&2\end{vmatrix}=-7 & A_{31}=\begin{vmatrix}-1&3\\3&0\end{vmatrix}=-9\\ A_{12}=-\begin{vmatrix}-2&0\\-5&2\end{vmatrix}=4 & A_{22}=\begin{vmatrix}0&3\\-5&2\end{vmatrix}=15 & A_{32}=-\begin{vmatrix}0&3\\-2&0\end{vmatrix}=-6\\ A_{13}=\begin{vmatrix}-2&3\\-5&-3\end{vmatrix}=21 & A_{23}=-\begin{vmatrix}0&-1\\-5&-3\end{vmatrix}=5 & A_{33}=\begin{vmatrix}0&-1\\-2&3\end{vmatrix}=-2\end{array}\right\}\Rightarrow Adj\left(A^T\right)=\begin{pmatrix}6&-7&-9\\4&15&-6\\21&5&-2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adj\left(A^T\right)=\frac{1}{59}\cdot\begin{pmatrix}6&-7&-9\\4&15&-6\\21&5&-2\end{pmatrix}$$