Ejercicios resueltos

3.2-1 Obtener el vector $\overrightarrow{PQ}$, donde los puntos P y Q son los dados:

$a)$ $P(1,4), Q(-2,5)$ $b)$ $P(0,0), Q(-9,10)$

$c)$ $P(8,3), Q(8,3)$ $d)$ $P(4,-2), Q(13,7)$

Solución

$a)$ $P(1,4), Q(-2,5) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (-2,5)-(1,4) = (-3,1)$

$b)$ $P(0,0), Q(-9,10) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (-9,10)-(0,0) = (-9,10)$

$c)$ $P(8,3), Q(8,3) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (8,3)-(8,3) = (0,0)$

$d)$ $P(4,-2), Q(13,7) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (13,7)-(4,-2) = (9,9)$

3.2-2 Suma los siguientes vectores:

$a)$ $\vec{u} = (1,-3), \vec{v} = (-2,5)$

$b)$ $\vec{u} = (-2,-2), \vec{v} = (1,1)$

$c)$ $\vec{u} = (2,4), \vec{v} = (-1,-3)$

$d)$ $\vec{u} = (-2,-6), \vec{v} = (-1,-4)$

Solución

$a)$ $\vec{u} = (1,-3), \vec{v} = (-2,5) \Rightarrow \vec{u}+\vec{v} = (1,-3)+(-2,5) = (-1,2)$

$b)$ $\vec{u} = (-2,-2), \vec{v} = (1,1) \Rightarrow \vec{u}+\vec{v} = (-2,-2)+(1,1) = (-1,-1)$

$c)$ $\vec{u} = (2,4), \vec{v} = (-1,-3) \Rightarrow \vec{u}+\vec{v} = (2,4)+(-1,-3) = (1,1)$

$d)$ $\vec{u} = (-2,-6), \vec{v} = (-1,-4) \Rightarrow \vec{u}+\vec{v} = (-2,-6)+(-1,-4) = (-3,-10)$

Ana Allueva – José Luis Alejandre – José Miguel González MATEMÁTICA APLICADA- Universidad Zaragoza

3.2-3 Realiza el producto del escalar por el vector indicado:

$a)\ k=2, \vec{u}=(-1,4)$ $\qquad b)\ k=-4, \vec{u}=(-5,3)$

$c)\ k=\frac{1}{2}, \vec{u}=(10,-5)$ $\qquad d)\ k=-7, \vec{u}=(2,4)$

Solución

$$a)\ k=2, \vec{u}=(-1,4) \Rightarrow k\cdot\vec{u}=2\cdot(-1,4)=(-2,8)$$

$$b)\ k=-4, \vec{u}=(-5,3) \Rightarrow k\cdot\vec{u}=-4\cdot(-5,3)=(20,-12)$$

$$c)\ k=\frac{1}{2}, \vec{u}=(10,-5) \Rightarrow k\cdot\vec{u}=\frac{1}{2}\cdot(10,-5)=\left(5,-\frac{5}{2}\right)$$

$$d)\ k=-7, \vec{u}=(2,4) \Rightarrow k\cdot\vec{u}=-7\cdot(2,4)=(-14,-28)$$

3.2-4 Comprueba si los siguientes vectores son linealmente independientes o dependientes:

$a)\ \vec{u}=(-1,4), \vec{v}=(0,1)$ $\qquad b)\ \vec{u}=(-5,3), \vec{v}=(10,-6)$

$c)\ \vec{u}=(10,-5), \vec{v}=(7,-1)$ $\qquad d)\ \vec{u}=(2,4), \vec{v}=(-1,-2)$

Solución

$$a)\ \vec{u}=(-1,4), \vec{v}=(0,1)$$

$$\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow \alpha\cdot(-1,4)+\beta\cdot(0,1)=(0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}-\alpha=0\\ 4\alpha+\beta=0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=\beta=0 \text{ de forma única} \Rightarrow \text{linealmente independientes}$$

$$b)\ \vec{u}=(-5,3), \vec{v}=(10,-6)$$

$$\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow \alpha\cdot(-5,3)+\beta\cdot(10,-6)=(0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}-5\alpha+10\beta=0\\ 3\alpha-6\beta=0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=2\beta \Rightarrow \text{linealmente dependientes}$$

c) $\vec{u}=(10,-5),\vec{v}=(7,-1)$

$$\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow\alpha\cdot(10,-5)+\beta\cdot(7,-1)=(0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}10\alpha+7\beta=0\\-5\alpha-\beta=0\end{array}\right\}\Rightarrow\beta=-5\alpha\Rightarrow 10\alpha-35\alpha=0\Rightarrow-25\alpha=0\Rightarrow\alpha=\beta=0$$

$\Rightarrow$ linealmente independientes

d) $\vec{u}=(2,4),\vec{v}=(-1,-2)$

$$\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow\alpha\cdot(2,4)+\beta\cdot(-1,-2)=(0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}2\alpha-\beta=0\\4\alpha-2\beta=0\end{array}\right\}\Rightarrow\beta=2\alpha\Rightarrow\text{linealmente dependientes}$$

3.2-5 Comprueba si los siguientes vectores forman un sistema generador:

a) $\vec{u}=(-1,4),\vec{v}=(0,1)$ **b)** $\vec{u}=(-5,3),\vec{v}=(10,-6)$

c) $\vec{u}=(10,-5),\vec{v}=(7,-1)$ **d)** $\vec{u}=(2,4),\vec{v}=(-1,-2)$

Solución

a) $\vec{u}=(-1,4),\vec{v}=(0,1)$

$$\alpha\cdot(-1,4)+\beta\cdot(0,1)=(x,y)\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-\alpha=x\\4\alpha+\beta=y\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=-x\\\beta=y+4x\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ sistema generador de $\mathbb{R}^2$

b) $\vec{u}=(-5,3),\vec{v}=(10,-6)$

$$\alpha\cdot(-5,3)+\beta\cdot(10,-6)=(x,y)\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-5\alpha+10\beta=x\\3\alpha-6\beta=y\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\alpha=\frac{10\beta-x}{5}\Rightarrow 3\cdot\frac{10\beta-x}{5}-6\beta=y\Rightarrow 30\beta-3x-30\beta=5y\Rightarrow-3x=5y$$

Sólo se pueden poner en combinación lineal aquellos vectores de $\mathbb{R}^2$ que verifiquen esa condición, luego no todos. Por tanto, no es sistema generador de $\mathbb{R}^2$

c) $\vec{u}=(10,-5),\vec{v}=(7,-1)$

$$\alpha\cdot(10,-5)+\beta\cdot(7,-1)=(x,y)\Rightarrow \left.\begin{array}{l}10\alpha+7\beta=x\\ -5\alpha-\beta=y\end{array}\right\}\Rightarrow \beta=-5\alpha-y$$

$$\Rightarrow 10\alpha+7\cdot(-5\alpha-y)=x\Rightarrow 10\alpha-35\alpha-7y=x\Rightarrow -25\alpha=x+7y$$

$$\alpha=-\frac{x+7y}{25}\Rightarrow \beta=-5\left(-\frac{x+7y}{25}\right)-y=\frac{x+7y}{5}-y=\frac{x+2y}{5}$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=-\dfrac{x+7y}{25}\\ \beta=\dfrac{x+2y}{5}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ sistema generador de } \mathbb{R}^2$$

d) $\vec{u}=(2,4),\vec{v}=(-1,-2)$

$$\alpha\cdot(2,4)+\beta\cdot(-1,-2)=(x,y)\Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\alpha-\beta=x\\ 4\alpha-2\beta=y\end{array}\right\}\Rightarrow \beta=2\alpha-x$$

$$\Rightarrow 4\alpha-2\cdot(2\alpha-x)=y\Rightarrow 4\alpha-4\alpha+2x=y\Rightarrow 2x=y$$

Sólo se pueden poner en combinación lineal aquellos vectores de $\mathbb{R}^2$ que verifiquen esa condición, luego no todos. Por tanto, no es sistema generador de $\mathbb{R}^2$

3.2-6 Comprueba si los siguientes vectores forman una base de $\mathbb{R}^2$:

a) $\vec{u}=(-1,4),\vec{v}=(0,1)$

b) $\vec{u}=(-5,3),\vec{v}=(10,-6)$

c) $\vec{u}=(10,-5),\vec{v}=(7,-1)$

d) $\vec{u}=(2,4),\vec{v}=(-1,-2)$

Solución

a) $\vec{u}=(-1,4),\vec{v}=(0,1)$

SI es base ya que por el problema 3.2-4 son linealmente independientes, y por el problema 3.2-5 forman un sistema generador.

b) $\vec{u}=(-5,3),\vec{v}=(10,-6)$

NO es base ya que por el problema 3.2-4 son linealmente dependientes.

c) $\vec{u}=(10,-5),\vec{v}=(7,-1)$

SI es base ya que por el problema 3.2-4 son linealmente independientes, y por el problema 3.2-5 forman un sistema generador.

d) $\vec{u}=(2,4),\vec{v}=(-1,-2)$

NO es base ya que por el problema 3.2-4 son linealmente dependientes.

3.2-7 Sean las bases $B_1=\{\vec{u},\vec{v}\}$, $B_2=\{\vec{a},\vec{b}\}$, donde $\vec{u}=(-1,4),\vec{v}=(0,1)$, $\vec{a}=(10,-5),\vec{b}=(7,-1)$. Obtener las coordenadas del vector dado en cada una de ellas:

a) $\vec{w}=(1,1)$ **b)** $\vec{w}=(-2,-3)$ **c)** $\vec{w}=(4,-2)$ **d)** $\vec{w}=(-5,10)$

Solución

a) $\vec{w}=(1,1)$

Respecto de la base $B_1=\{\vec{u},\vec{v}\}$:

$$\vec{w}=\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}\Rightarrow(1,1)=\alpha\cdot(-1,4)+\beta\cdot(0,1)\Rightarrow\left.\begin{array}{l}1=-\alpha\\1=4\alpha+\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=-1\\\beta=5\end{array}\right\}$$

Respecto de la base $B_2=\{\vec{a},\vec{b}\}$:

$$\vec{w}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}\Rightarrow(1,1)=\alpha\cdot(10,-5)+\beta\cdot(7,-1)$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}1=10\alpha+7\beta\\1=-5\alpha-\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\beta=-5\alpha-1\Rightarrow1=10\alpha+7\cdot(-5\alpha-1)=-25\alpha-7$$

$$\alpha=-\frac{8}{25}\Rightarrow\beta=-5\cdot\left(-\frac{8}{25}\right)-1=\frac{8}{5}-1=\frac{3}{5}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha=-\dfrac{8}{25}\\\beta=\dfrac{3}{5}\end{array}\right.$$

b) $\vec{w}=(-2,-3)$

Respecto de la base $B_1=\{\vec{u},\vec{v}\}$:

$$\vec{w}=\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}\Rightarrow(-2,-3)=\alpha\cdot(-1,4)+\beta\cdot(0,1)$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-2=-\alpha\\-3=4\alpha+\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=2\\\beta=-11\end{array}\right\}$$

Respecto de la base $B_2=\{\vec{a},\vec{b}\}$:

$$\vec{w}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}\Rightarrow(-2,-3)=\alpha\cdot(10,-5)+\beta\cdot(7,-1)$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-2=10\alpha+7\beta\\-3=-5\alpha-\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\beta=-5\alpha+3\Rightarrow-2=10\alpha+7\cdot(-5\alpha+3)=-25\alpha+21$$

$$\alpha=\frac{23}{25}\Rightarrow\beta=-5\cdot\left(\frac{23}{25}\right)+3=-\frac{23}{5}+3=-\frac{8}{5}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{23}{25}\\\beta=-\dfrac{8}{5}\end{cases}$$

c) $\vec{w}=(4,-2)$

Respecto de la base $B_1=\{\vec{u},\vec{v}\}$:

$$\vec{w}=\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}\Rightarrow(4,-2)=\alpha\cdot(-1,4)+\beta\cdot(0,1)$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}4=-\alpha\\-2=4\alpha+\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=-4\\\beta=14\end{array}\right\}$$

Respecto de la base $B_2=\{\vec{a},\vec{b}\}$:

$$\vec{w}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}\Rightarrow(4,-2)=\alpha\cdot(10,-5)+\beta\cdot(7,-1)$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}4=10\alpha+7\beta\\-2=-5\alpha-\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\beta=-5\alpha+2\Rightarrow4=10\alpha+7\cdot(-5\alpha+2)=-25\alpha+14$$

$$\alpha=\frac{2}{5}\Rightarrow\beta=-5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)+2=-2+2=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{2}{5}\\\beta=0\end{cases}$$

d) $\vec{w}=(-5,10)$

Respecto de la base $B_1=\{\vec{u},\vec{v}\}$:

$$\vec{w}=\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}\Rightarrow(-5,10)=\alpha\cdot(-1,4)+\beta\cdot(0,1)$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-5=-\alpha\\10=4\alpha+\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=5\\\beta=-10\end{array}\right\}$$

Respecto de la base $B_2=\{\vec{a},\vec{b}\}$:

$$\vec{w}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}\Rightarrow(-5,10)=\alpha\cdot(10,-5)+\beta\cdot(7,-1)$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-5=10\alpha+7\beta\\10=-5\alpha-\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\beta=-5\alpha-10\Rightarrow-5=10\alpha+7\cdot(-5\alpha-10)=-25\alpha-70$$

$$\alpha=-\frac{13}{5}\Rightarrow\beta=-5\cdot\left(-\frac{13}{5}\right)-10=13-10=3\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-\dfrac{13}{5}\\\beta=3\end{cases}$$

3.2-8 Obtener el producto escalar de los vectores que se indican:

a) $\vec{u}=(-1,4),\vec{v}=(0,1)$ **b)** $\vec{u}=(-5,3),\vec{v}=(10,-6)$

c) $\vec{u}=(10,-5),\vec{v}=(7,-1)$ **d)** $\vec{u}=(2,4),\vec{v}=(-1,-2)$

e) $\vec{u}=(1,1,1),\vec{v}=(-2,-6,3)$ **f)** $\vec{u}=(1,0,-5),\vec{v}=(7,-2,1)$

g) $\vec{u}=(2,2,-3),\vec{v}=(-1,2,3)$ **h)** $\vec{u}=(2,4,-2),\vec{v}=(-1,-2,-1)$

Solución

a) $\vec{u}=(-1,4),\vec{v}=(0,1)\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1)\cdot0+4\cdot1=4$

b) $\vec{u}=(-5,3),\vec{v}=(10,-6)\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=(-5)\cdot10+3\cdot(-6)=-50-18=-68$

c) $\vec{u}=(10,-5),\vec{v}=(7,-1)\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=10\cdot7+(-5)\cdot(-1)=70+5=75$

d) $\vec{u}=(2,4),\vec{v}=(-1,-2)\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=2\cdot(-1)+4\cdot(-2)=-2-8=-10$

e) $\vec{u}=(1,1,1),\vec{v}=(-2,-6,3)\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=1\cdot(-2)+1\cdot(-6)+1\cdot 3=-2-6+3=-5$

f) $\vec{u}=(1,0,-5),\vec{v}=(7,-2,1)\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=1\cdot 7+0\cdot(-2)+(-5)\cdot 1=7-5=2$

g) $\vec{u}=(2,2,-3),\vec{v}=(-1,2,3)\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=2\cdot(-1)+2\cdot 2+(-3)\cdot 3=-2+4-9=-7$

h) $\vec{u}=(2,4,-2),\vec{v}=(-1,-2,-1)\Rightarrow$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=2\cdot(-1)+4\cdot(-2)+(-2)\cdot(-1)=-2-8+2=-8$$

3.2-9 Obtener el producto vectorial de los vectores que se indican:

a) $\vec{u}=(1,1,1),\vec{v}=(-2,-6,3)$

b) $\vec{u}=(1,0,-5),\vec{v}=(7,-2,1)$

c) $\vec{u}=(2,2,-3),\vec{v}=(-1,2,3)$

d) $\vec{u}=(2,4,-2),\vec{v}=(-1,-2,-1)$

Solución

a) $\vec{u}=(1,1,1),\vec{v}=(-2,-6,3)$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & -6 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -6 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & -6\end{vmatrix}\vec{k}=9\vec{i}-5\vec{j}-4\vec{k}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=(9,-5,-4)$$

b) $\vec{u}=(1,0,-5),\vec{v}=(7,-2,1)$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -5\\ 7 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -5\\ -2 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -5\\ 7 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 7 & -2\end{vmatrix}\vec{k}=-10\vec{i}-36\vec{j}-2\vec{k}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=(-10,-36,-2)$$

c) $\vec{u}=(2,2,-3),\vec{v}=(-1,2,3)$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & -3\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=12\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=(12,-3,6)$$

d) $\vec{u}=(2,4,-2),\vec{v}=(-1,-2,-1)$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 4 & -2\\ -1 & -2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & -2\\ -2 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -2\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{vmatrix}\vec{k}=-8\vec{i}+4\vec{j}+0\vec{k}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=(-8,4,0)$$
