Ejercicios resueltos

3.3-1 Halla la ecuación vectorial, en paramétricas, continua y general de la recta que pasa por el punto indicado y tiene por vector direccional el que se señala:

a) $P(1,4), \vec{v}=(-2,5)$ **b)** $P(0,0), \vec{v}=(-9,10)$

c) $P(8,3), \vec{v}=(8,3)$ **d)** $P(4,-2), \vec{v}=(13,7)$

Solución

a) $P(1,4), \vec{v}=(-2,5)$

Ecuación vectorial: $(x,y)-(1,4)=t\cdot(-2,5)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x=1-2\cdot t \\ y=4+5\cdot t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-4}{5}$

Ecuación general:

$$5\cdot(x-1)=-2\cdot(y-4)\Rightarrow 5x-5=-2y+8\Rightarrow 5x+2y-13=0$$

b) $P(0,0), \vec{v}=(-9,10)$

Ecuación vectorial: $(x,y)-(0,0)=t\cdot(-9,10)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x=0-9\cdot t=-9\cdot t \\ y=0+10\cdot t=10\cdot t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-0}{-9}=\dfrac{y-0}{10}\Rightarrow\dfrac{x}{-9}=\dfrac{y}{10}$

Ecuación general: $10x=-9y\Rightarrow 10x+9y=0$

$c)\ \ P(8,3), \vec{v}=(8,3)$

Ecuación vectorial: $(x,y)-(8,3)=t\cdot(8,3)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x=8+8\cdot t \\ y=3+3\cdot t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-8}{8}=\dfrac{y-3}{3}$

Ecuación general:

$3\cdot(x-8)=8\cdot(y-3) \Rightarrow 3x-24=8y-24 \Rightarrow 3x-8y=0$

$d)\ \ P(4,-2), \vec{v}=(13,7)$

Ecuación vectorial: $(x,y)-(4,-2)=t\cdot(13,7)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x=4+13\cdot t \\ y=-2+7\cdot t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-4}{13}=\dfrac{y+2}{7}$

Ecuación general:

$7\cdot(x-4)=13\cdot(y+2) \Rightarrow 7x-28=13y+26 \Rightarrow 7x-13y-54=0$

3.3-2 Halla la ecuación punto-pendiente y en forma explícita de las rectas que pasan por los dos puntos dados:

$a)\ \ P(1,-3), Q(-2,5)$

$b)\ \ P(-2,-2), Q(1,1)$

$c)\ \ P(2,4), Q(-1,-3)$

$d)\ \ P(-2,-6), Q(-1,-4)$

Solución

$a)\ \ P(1,-3), Q(-2,5)$

$\overrightarrow{PQ}=(-2-1,5+3)=(-3,8)$ vector direccional de la recta

Pendiente: $\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{v}_2}{\boldsymbol{v}_1} = \frac{8}{-3}$

Ecuación punto-pendiente: $y+3=-\frac{8}{3}(x-1)$

Ecuación explícita: $y+3=-\frac{8}{3}x+\frac{8}{3} \Rightarrow y=-\frac{8}{3}x-\frac{1}{3}$

b) $P(-2,-2), Q(1,1)$

$\overrightarrow{PQ}=(1+2,1+2)=(3,3)$ vector direccional de la recta

Pendiente: $\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{v}_2}{\boldsymbol{v}_1} = \frac{3}{3} = 1$

Ecuación punto-pendiente: $y+2=1\cdot(x+2)$

Ecuación explícita: $y+2=x+2 \Rightarrow y=x$

c) $P(2,4), Q(-1,-3)$

$\overrightarrow{PQ}=(-1-2,-3-4)=(-3,-7)$ vector direccional de la recta

Pendiente: $\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{v}_2}{\boldsymbol{v}_1} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$

Ecuación punto-pendiente: $y-4=\frac{7}{3}\cdot(x-2)$

Ecuación explícita: $y-4=\frac{7}{3}x-\frac{14}{3} \Rightarrow y=\frac{7}{3}x-\frac{2}{3}$

d) $P(-2,-6), Q(-1,-4)$

$\overrightarrow{PQ}=(-1+2,-4+6)=(1,2)$ vector direccional de la recta

Pendiente: $\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{v}_2}{\boldsymbol{v}_1} = \frac{2}{1} = 2$

Ecuación punto-pendiente: $y+6=2\cdot(x+2)$

Ecuación explícita: $y+6=2x+4 \Rightarrow y=2x-2$

3.3-3 Comprobar que las rectas $\mathbf{3x + 2y + 8 = 0}$ y $\mathbf{6x + 4y - 6 = 0}$ son paralelas.

Solución

Recta *r*: $\mathbf{3x+2y+8=0} \Rightarrow \vec{v}_r = (-B, A) = (-2,3)$

Recta *s*: $\mathbf{6x+4y-6=0} \Rightarrow \vec{v}_s = (-B, A) = (-4,6)$

$\vec{v}_s = (-4,6) = 2\cdot(-2,3) = 2\cdot\vec{v}_r \Rightarrow$ son proporcionales.

Así *r* y *s* son paralelas.

3.3-4 Hallar el valor del parámetro ***a*** para que las rectas $\mathbf{14x+12y-6=0}$ y $\mathbf{-7x+ay+12=0}$ sean paralelas.

Solución

Recta *r*: $\mathbf{14x+12y-6=0} \Rightarrow \vec{v}_r = (-B, A) = (-12,14)$

Recta *s*: $\mathbf{-7x+ay+12=0} \Rightarrow \vec{v}_s = (-B, A) = (-a,-7)$

Para que las rectas sean paralelas, los vectores direccionales deben ser proporcionales:

$$\vec{v}_r = \lambda\cdot\vec{v}_s \Rightarrow (-12,14) = \lambda\cdot(-a,-7) \Rightarrow$$
$$\left.\begin{array}{l} -12 = -\lambda\cdot a \\ 14 = -7\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow -12 = 2a \Rightarrow a = -6$$

3.3-5 Comprobar que las rectas $\mathbf{-x + 6y + 7 = 0}$ y $\mathbf{-6x - y - 8 = 0}$ son perpendiculares.

Solución

Recta *r*: $\mathbf{-x+6y+7=0} \Rightarrow \vec{v}_r = (-B, A) = (-6,-1)$

Recta *s*: $\mathbf{-6x-y-8=0} \Rightarrow \vec{v}_s = (-B, A) = (1,-6)$

$\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s = (-6,-1)\cdot(1,-6) = -6+6 = 0 \Rightarrow$ *r* y *s* son perpendiculares.

3.3-6 Hallar el valor del parámetro $\boldsymbol{a}$ para que las rectas $\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{4}\boldsymbol{y} + \mathbf{9} = \mathbf{0}$ y $-\mathbf{8}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{ay} + \mathbf{10} = \mathbf{0}$ sean perpendiculares.

Solución

Recta *r*: $\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{4}\boldsymbol{y} + \mathbf{9} = \mathbf{0} \Rightarrow \vec{v}_r = (-B, A) = (4,3)$

Recta *s*: $-\mathbf{8}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{ay} + \mathbf{10} = \mathbf{0} \Rightarrow \vec{v}_s = (-B, A) = (-a,-8)$

Para que las rectas sean perpendiculares, el producto escalar de los vectores direccionales debe ser cero:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (4,3)\cdot(-a,-8) = 0 \Rightarrow -4a - 24 = 0 \Rightarrow a = -6$$

3.3-7 Determina una recta paralela y otra perpendicular a la recta de ecuación $-\mathbf{4}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{y} + \mathbf{7} = \mathbf{0}$

Solución

Recta *r*: $-\mathbf{4}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{y} + \mathbf{7} = \mathbf{0} \Rightarrow \vec{v}_r = (-B, A) = (-2,-4)$

Recta paralela *s* es cualquiera que tenga un vector direccional proporcional al de la recta *r*, por ejemplo el vector opuesto $\vec{v}_s = (2,4)$, y con término independiente cualquiera:

$$\mathbf{4}\boldsymbol{x} - \mathbf{2}\boldsymbol{y} + \mathbf{10} = \mathbf{0}$$

Recta perpendicular *t* es cualquiera que tenga un vector direccional perpendicular al de la recta *r*, es decir, que el producto escalar sea cero.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_t = (-2,-4)\cdot(-B, A) = 0 \Rightarrow 2B - 4A = 0$$

Entre las posibles soluciones, tomamos por ejemplo A = 1, B = 2. Así, la recta perpendicular *t* sería de la forma:

$$\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{y} + \mathbf{8} = \mathbf{0}$$

Hemos elegido como término independiente cualquier número.

3.3-8 Determina la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a la recta de ecuación $\mathbf{8x + 3y - 2 = 0}$

Solución

Recta *r*: $\mathbf{8x + 3y - 2 = 0} \Rightarrow \vec{v}_r = (-B, A) = (-3, 8)$

Recta perpendicular *s* es cualquiera que tenga un vector direccional perpendicular al de la recta *r*, es decir, que el producto escalar sea cero.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (-3, 8) \cdot (-B, A) = 0 \Rightarrow 3B + 8A = 0$$

Entre las posibles soluciones, tomamos por ejemplo A = 3, B = –8. Así, toda recta perpendicular es de la forma:

$$\mathbf{3x - 8y + C = 0}$$

Para obtener la recta *s* que se pide, imponemos que pase por el origen, es decir, por el punto (0, 0):

$$(0, 0) \in s \Rightarrow 3 \cdot 0 - 8 \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

La recta *s* tendrá por tanto la siguiente ecuación:

$$\mathbf{3x - 8y = 0}$$

3.3-9 Determina una recta paralela y otra perpendicular a la recta de ecuación $\mathbf{4x - 2y + 9 = 0}$ que pasen por el punto (2, –1).

Solución

Recta *r*: $\mathbf{4x - 2y + 9 = 0} \Rightarrow \vec{v}_r = (-B, A) = (2, 4)$

Recta paralela *s* es cualquiera que tenga un vector direccional múltiplo del de la recta *r*, por ejemplo el vector $\vec{v}_s = (1, 2)$, y con término independiente cualquiera:

$$\mathbf{2x - y + C = 0}$$

Imponemos que pase por el punto (2, –1):

$$(2, -1) \in s \Rightarrow 2 \cdot 2 - (-1) + C = 0 \Rightarrow C = -5$$

La recta *s* paralela que se pide tendrá por tanto la siguiente ecuación:

$$\mathbf{2x - y - 5 = 0}$$

Recta perpendicular *t* es cualquiera que tenga un vector direccional perpendicular al de la recta *r*, es decir, que el producto escalar sea cero.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_t = (2,4)\cdot(-B,A) = 0 \Rightarrow -2B + 4A = 0$$

Entre las posibles soluciones, tomamos por ejemplo A = 1, B = 2. Así, una recta perpendicular sería de la forma:

$$x + 2y + C = 0$$

Imponemos que pase por el punto (2, –1):

$$(2,-1) \in t \Rightarrow 2 + 2\cdot(-1) + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

La recta *t* perpendicular que se pide tendrá por tanto la siguiente ecuación:

$$x + 2y = 0$$

3.3-10 Determina la recta que pasa por el punto (4, –6), y que es perpendicular a otra recta paralela al vector (3, 7) y que pasa por el punto (8, 2).

Solución

Sea s la recta paralela al vector (3, 7) y que pasa por el punto (8, 2):

$$\vec{v}_s = (3,7) = (-B,A) \Rightarrow A = 7, B = -3 \Rightarrow 7x - 3y + C = 0$$

Imponemos que el punto (8, 2) pase por s:

$$(8,2) \in s \Rightarrow 7\cdot 8 - 3\cdot 2 + C = 0 \Rightarrow C = -50$$

La recta s tendrá de ecuación: $7x - 3y - 50 = 0$

La recta r pedida debe ser perpendicular a s, esto es:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (v_1, v_2)\cdot(3,7) = 0 \Rightarrow 3v_1 + 7v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = 7, v_2 = -3$$

La ecuación de la recta r será: $-3x - 7y + C = 0$

Imponemos que el punto (4, –6) pase por r:

$$(4,-6) \in r \Rightarrow -3\cdot 4 - 7\cdot(-6) + C = 0 \Rightarrow C = -30$$

La recta r tendrá de ecuación: $-3x - 7y - 30 = 0 \Rightarrow 3x + 7y + 30 = 0$

3.3-11 Calcula la distancia del punto $P(4, 3)$ a la recta $\mathbf{8x+7y+2=0}$

Solución

Sea $Q(a,b)$ el punto de la recta $\mathbf{8x+7y+2=0}$ en la perpendicular trazada desde $P(4, 3)$ hasta dicha recta.

$$Q(a,b)\in 8x+7y+2=0 \Rightarrow 8a+7b+2=0$$

Un vector direccional de la recta $\mathbf{8x+7y+2=0}$ es:

$$\vec{v}=(-7,8)$$

Por tanto, los vectores $\overrightarrow{PQ},\vec{v}$ son perpendiculares:

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow(a-4,b-3)\cdot(-7,8)=0\Rightarrow -7\cdot(a-4)+8\cdot(b-3)=0$$

Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l}8a+7b+2=0\\-7\cdot(a-4)+8\cdot(b-3)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}8a+7b+2=0\\-7a+8b+4=0\end{array}\right\}\Rightarrow a=-\frac{7b+2}{8}$$

$$-7\cdot\left(-\frac{7b+2}{8}\right)+8b+4=0\Rightarrow 49b+14+64b+32=0\Rightarrow 113b=-46$$

$$b=-\frac{46}{113}\Rightarrow a=-\frac{7\cdot\left(-\frac{46}{113}\right)+2}{8}=-\frac{-\frac{96}{113}}{8}=\frac{12}{113}$$

$$Q(a,b)=\left(\frac{12}{113},-\frac{46}{113}\right)$$

La distancia del punto P a la recta es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{12}{113}-4,-\frac{46}{113}-3\right)=\left(-\frac{440}{113},-\frac{385}{113}\right)$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{\left(-\frac{440}{113}\right)^2+\left(-\frac{385}{113}\right)^2}=\sqrt{\frac{440^2+385^2}{113^2}}=\sqrt{\frac{341.825}{113^2}}=\sqrt{\frac{3.025}{113}}=\frac{55}{\sqrt{113}}$$

3.3-12 Calcula la distancia del punto *P* (3, 1) a la recta $\boldsymbol{x+8y+2=0}$

Solución

Sea $Q(a,b)$ el punto de la recta $\boldsymbol{x+8y+2=0}$ en la perpendicular trazada desde *P* (3, 1) hasta dicha recta.

$$Q(a,b)\in x+8y+2=0 \Rightarrow a+8b+2=0$$

Un vector direccional de la recta $\boldsymbol{x+8y+2=0}$ es:

$$\vec{v}=(-8,1)$$

Por tanto, los vectores $\overrightarrow{PQ},\vec{v}$ son perpendiculares:

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow(a-3,b-1)\cdot(-8,1)=0\Rightarrow-8\cdot(a-3)+1\cdot(b-1)=0$$

Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l}a+8b+2=0\\-8\cdot(a-3)+1\cdot(b-1)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a+8b+2=0\\-8a+b+23=0\end{array}\right\}\Rightarrow a=-8b-2$$

$$-8\cdot(-8b-2)+b+23=0\Rightarrow64b+16+b+23=0\Rightarrow65b=-39$$

$$b=-\frac{39}{65}\Rightarrow a=-8\cdot\left(-\frac{39}{65}\right)-2=\frac{312}{65}-2=\frac{182}{65}$$

$$Q(a,b)=\left(\frac{182}{65},-\frac{39}{65}\right)$$

La distancia del punto *P* a la recta es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{182}{65}-3,-\frac{39}{65}-1\right)=\left(-\frac{13}{65},-\frac{104}{65}\right)$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{\left(-\frac{13}{65}\right)^2+\left(-\frac{104}{65}\right)^2}=\sqrt{\frac{13^2+104^2}{65^2}}=\sqrt{\frac{10.985}{65^2}}=\sqrt{\frac{169}{65}}=\frac{13}{\sqrt{65}}$$

3.3-13 Calcula la distancia del punto $P(0, 0)$ a la recta $\boldsymbol{2x - 5y + 3 = 0}$

Solución

Sea $Q(a,b)$ el punto de la recta $\boldsymbol{2x - 5y + 3 = 0}$ en la perpendicular trazada desde $P(0, 0)$ hasta dicha recta.

$$Q(a,b) \in 2x - 5y + 3 = 0 \Rightarrow 2a - 5b + 3 = 0$$

Un vector direccional de la recta $\boldsymbol{2x - 5y + 3 = 0}$ es:

$$\vec{v} = (5,2)$$

Por tanto, los vectores $\overrightarrow{PQ}, \vec{v}$ son perpendiculares:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (a-0, b-0)\cdot(5,2) = 0 \Rightarrow 5a + 2b = 0$$

Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} 2a - 5b + 3 = 0 \\ 5a + 2b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -\frac{2}{5}b \Rightarrow 2\cdot\left(-\frac{2}{5}b\right) - 5b + 3 = 0$$

$$-4b - 25b + 15 = 0 \Rightarrow 29b = 15 \Rightarrow b = \frac{15}{29} \Rightarrow a = -\frac{2}{5}\cdot\frac{15}{29} = -\frac{6}{29}$$

$$Q(a,b) = \left(-\frac{6}{29}, \frac{15}{29}\right)$$

La distancia del punto P a la recta es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{6}{29} - 0, \frac{15}{29} - 0\right) = \left(-\frac{6}{29}, \frac{15}{29}\right)$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{\left(-\frac{6}{29}\right)^2 + \left(\frac{15}{29}\right)^2} = \sqrt{\frac{36+225}{29^2}} = \sqrt{\frac{261}{29^2}} = \sqrt{\frac{9}{29}} = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

3.3-14 Calcula la distancia del punto *P* (0, 0) a la recta $4x + 3y = 0$

Solución

Sea $Q(a,b)$ el punto de la recta $4x + 3y = 0$ en la perpendicular trazada desde *P* (0, 0) hasta dicha recta.

$$Q(a,b) \in 4x + 3y = 0 \Rightarrow 4a + 3b = 0$$

Un vector direccional de la recta $4x + 3y = 0$ es:

$$\vec{v} = (-3,4)$$

Por tanto, los vectores $\overrightarrow{PQ}, \vec{v}$ son perpendiculares:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (a-0, b-0) \cdot (-3,4) = 0 \Rightarrow -3a + 4b = 0$$

Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} 4a + 3b = 0 \\ -3a + 4b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -\frac{3}{4}b \Rightarrow -3 \cdot \left(-\frac{3}{4}b\right) + 4b = 0$$

$$9b + 16b = 0 \Rightarrow 25b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow Q(a,b) = (0,0)$$

La distancia del punto *P* a la recta es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{PQ} = (0-0, 0-0) = (0,0) \Rightarrow \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$$

Esto significa que el punto *P* pertenece a la recta dada.

3.3-15 Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto indicado y es perpendicular al vector dado:

a) $P(1,2,-4), \vec{v} = (-1,4,0)$

b) $P(0,0,0), \vec{v} = (-5,3,1)$

c) $P(-1,-5,-9), \vec{v} = (10,-5,-2)$

d) $P(-7,0,-4), \vec{v} = (2,4,6)$

Solución

$a)$ $P(1,2,-4), \vec{v}=(-1,4,0)$

Ecuación del plano: $Ax+By+Cz+D=0$

$\vec{v}=(-1,4,0) \Rightarrow -x+4y+D=0$

$P(1,2,-4) \in plano \Rightarrow -1+4\cdot 2+D=0 \Rightarrow D=-7 \Rightarrow -x+4y-7=0$

$$-x+4y=7$$

$b)$ $P(0,0,0), \vec{v}=(-5,3,1)$

Ecuación del plano: $Ax+By+Cz+D=0$

$\vec{v}=(-5,3,1) \Rightarrow -5x+3y+z+D=0$

$P(0,0,0) \in plano \Rightarrow 0+0+0+D=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow -5x+3y+z=0$

$$-5x+3y+z=0$$

$c)$ $P(-1,-5,-9), \vec{v}=(10,-5,-2)$

Ecuación del plano: $Ax+By+Cz+D=0$

$\vec{v}=(10,-5,-2) \Rightarrow 10x-5y-2z+D=0$

$P(-1,-5,-9) \in plano \Rightarrow 10\cdot(-1)-5\cdot(-5)-2\cdot(-9)+D=0$

$D=-33 \Rightarrow 10x-5y-2z-33=0$

$$10x-5y-2z=33$$

$d)$ $P(-7,0,-4), \vec{v}=(2,4,6)$

Ecuación del plano: $Ax+By+Cz+D=0$

$\vec{v}=(2,4,6) \Rightarrow 2x+4y+6z+D=0$

$P(-7,0,-4) \in plano \Rightarrow 2\cdot(-7)+4\cdot(0)+6\cdot(-4)+D=0$

$D=38 \Rightarrow 2x+4y+6z+38=0$

$$x+2y+3z=-19$$