Ejercicios resueltos

3.4-1 Halla las ecuaciones de las circunferencias cuyos centros y radios se indican:

a) $C(1,4), r=5$

b) $C(3,-5), r=2$

c) $C(0,3), r=4$

d) $C(3,0), r=4$

Solución

a) $C(1,4), r=5$

$$(x-1)^2+(y-4)^2=5^2 \Rightarrow x^2-2x+1+y^2-8y+16=25$$

$$x^2-2x+y^2-8y-8=0$$

b) $C(3,-5), r=2$

$$(x-3)^2+(y+5)^2=2^2 \Rightarrow x^2-6x+9+y^2+10y+25=4$$

$$x^2-6x+y^2+10y+30=0$$

c) $C(0,3), r=4$

$$(x-0)^2+(y-3)^2=4^2 \Rightarrow x^2+y^2-6y+9=16 \Rightarrow x^2+y^2-6y-7=0$$

d) $C(3,0), r=4$

$$(x-3)^2+(y-0)^2=4^2 \Rightarrow x^2-6x+9+y^2=16 \Rightarrow x^2-6x+y^2-7=0$$

Ana Allueva – José Luis Alejandre – José Miguel González MATEMÁTICA APLICADA- Universidad Zaragoza

3.4-2 Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(2, 0), B(2, 3) y C(1, 3).

Solución

Se trata de encontrar las coordenadas del centro y el valor del radio, es decir, tres incógnitas. Como tenemos tres datos, los sustituimos en la ecuación genérica de la circunferencia:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

$$A(2,0),B(2,3),C(1,3)\in \textit{circunferencia} \Rightarrow$$

$$(2-a)^2+(0-b)^2=r^2 \Rightarrow 4-4a+a^2+b^2=r^2$$

$$(2-a)^2+(3-b)^2=r^2 \Rightarrow 4-4a+a^2+9-6b+b^2=r^2$$

$$(1-a)^2+(3-b)^2=r^2 \Rightarrow 1-2a+a^2+9-6b+b^2=r^2$$

Igualamos la primera con la segunda ecuación:

$$4-4a+a^2+b^2=4-4a+a^2+9-6b+b^2 \Rightarrow 0=9-6b \Rightarrow b=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

Igualamos la segunda con la tercera ecuación:

$$4-4a+a^2+9-6b+b^2=1-2a+a^2+9-6b+b^2 \Rightarrow 4-4a=1-2a \Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

Sustituimos estos valores en cualquiera de las tres ecuaciones, por ejemplo, en la primera:

$$4-4a+a^2+b^2=r^2 \Rightarrow 4-4\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=r^2 \Rightarrow 4-6+\frac{9}{2}=r^2 \Rightarrow r^2=\frac{5}{2}$$

Por tanto, como el radio debe ser positivo: $r^2=\frac{5}{2} \Rightarrow r=\sqrt{\frac{5}{2}}$

La ecuación de la circunferencia pedida es:

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2=\frac{5}{2}$$

3.4-3 Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en la recta de ecuación $\boldsymbol{x - 2y - 7 = 0}$ y que pasa por los puntos A(0, 2), B(2, 1).

Solución

Como el centro C(a, b) pertenece a la recta $\boldsymbol{x - 2y - 7 = 0}$, debe cumplirse que:

$$a - 2b - 7 = 0 \Rightarrow a = 2b + 7$$

Como la circunferencia pasa por los puntos A(0, 2), B(2, 1), debe cumplirse que:

$$(0-a)^2 + (2-b)^2 = r^2 \Rightarrow a^2 + 4 - 4b + b^2 = r^2$$

$$(2-a)^2 + (1-b)^2 = r^2 \Rightarrow 4 - 4a + a^2 + 1 - 2b + b^2 = r^2$$

Igualando estas dos ecuaciones se tiene que:

$$a^2 + 4 - 4b + b^2 = 4 - 4a + a^2 + 1 - 2b + b^2 \Rightarrow 0 = -4a + 1 + 2b$$

Como teníamos que $a = 2b + 7$, sustituyendo:

$$0 = -4(2b+7) + 1 + 2b \Rightarrow 0 = -8b - 28 + 1 + 2b \Rightarrow 0 = -27 - 6b \Rightarrow b = -\frac{27}{6} = -\frac{9}{2}$$

Así obtenemos el valor de a:

$$a = 2b + 7 = 2 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) + 7 = -9 + 7 = -2$$

Finalmente, sustituimos en cualquiera de las dos ecuaciones que contienen el valor del radio, por ejemplo la correspondiente al punto A:

$$a^2 + 4 - 4b + b^2 = r^2 \Rightarrow (-2)^2 + 4 - 4 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) + \left(-\frac{9}{2}\right)^2 = r^2 \Rightarrow 4 + 4 + 18 + \frac{81}{4} = r^2$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{185}{4} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{185}{4}}$$

La ecuación de la circunferencia pedida es:

$$(x+2)^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{185}{4}}\right)^2 = \frac{185}{4}$$

3.4-4 Calcula la ecuación de la circunferencia sabiendo que uno de sus diámetros es el segmento AB con A(0, –3), B(2, 0).

Solución

La longitud del diámetro será la distancia entre los puntos A y B:

$$d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(2-0)^2+(0+3)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

Por tanto, el radio será la mitad del diámetro: $r=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

Como la circunferencia pasa por A(0, –3), B(2, 0), debe cumplirse que:

$$(0-a)^2+(-3-b)^2=r^2\Rightarrow a^2+9+6b+b^2=\frac{13}{4}$$

$$(2-a)^2+(0-b)^2=r^2\Rightarrow 4-4a+a^2+b^2=\frac{13}{4}$$

Igualando estas dos ecuaciones se tiene que:

$$a^2+9+6b+b^2=4-4a+a^2+b^2\Rightarrow 9+6b=4-4a\Rightarrow b=\frac{-5-4a}{6}$$

Sustituyendo en cualquiera de ellas, por ejemplo en la segunda:

$$4-4a+a^2+b^2=\frac{13}{4}\Rightarrow 4-4a+a^2+\left(\frac{-5-4a}{6}\right)^2=\frac{13}{4}$$

$$4-4a+a^2+\frac{25+40a+16a^2}{36}=\frac{13}{4}$$

$$144-144a+36a^2+25+40a+16a^2=117$$

$$52a^2-104a+52=0\Rightarrow a^2-2a+1=0\Rightarrow a=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=1$$

Así obtenemos el valor de b: $b=\dfrac{-5-4a}{6}\Rightarrow b=\dfrac{-5-4}{6}=-\dfrac{9}{6}=-\dfrac{3}{2}$

La ecuación de la circunferencia pedida es:

$$(x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$$

3.4-5 Calcula los semiejes y las coordenadas de los focos y la excentricidad de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Dibújala.

Solución

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2=25 \\ b^2=9 \end{matrix}\right\} \overset{a^2=b^2+c^2}{\Rightarrow} c^2=25-9=16 \Rightarrow a=5,\quad b=3,\quad c=4$$

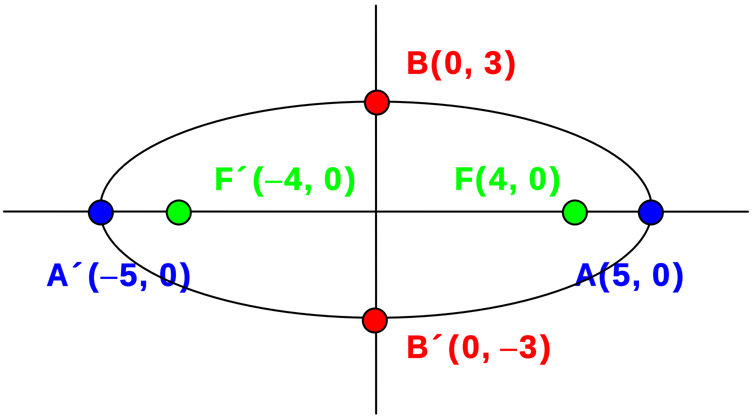
Como el centro de la elipse es el origen, las coordenadas de los vértices que determinan el eje mayor son $A(5,0)$, $A'(-5,0)$.

Análogamente, las coordenadas de los vértices que determinan el eje menor son $B(0,3)$, $B'(0,-3)$.

Las coordenadas de los focos vendrán dadas por la distancia focal $F(4,0)$, $F'(-4,0)$.

Finalmente, la excentricidad de la elipse será $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$.

Podemos dibujar la elipse con todos estos datos:



3.4-6 Calcula los semiejes y las coordenadas de los focos y la excentricidad de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$. Dibújala.

Solución

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2=25 \\ b^2=16 \end{matrix}\right\} \overset{a^2=b^2+c^2}{\Rightarrow} c^2=25-16=9 \Rightarrow a=5,\quad b=4,\quad c=3$$

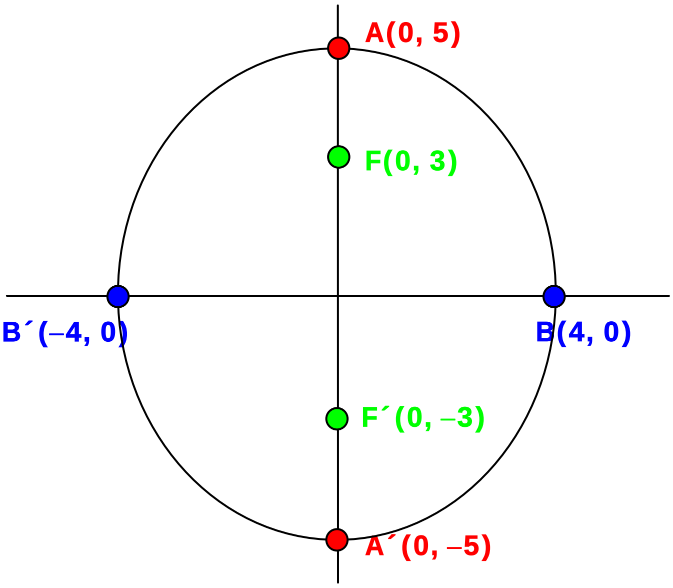
Como el centro de la elipse es el origen, las coordenadas de los vértices que determinan el eje mayor son $A(0,5)$, $A'(0,-5)$.

Análogamente, las coordenadas de los vértices que determinan el eje menor son $B(4,0)$, $B'(-4,0)$.

Las coordenadas de los focos vendrán dadas por la distancia focal $F(0,3)$, $F'(0,-3)$.

Finalmente, la excentricidad de la elipse será $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$.

Podemos dibujar la elipse con todos estos datos:



3.4-7 Halla los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ con la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Solución

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 16 \\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{16 - x^2}{9} = 1$$

$$9x^2 + 25\cdot\left(16 - x^2\right) = 25\cdot 9 \Rightarrow 9x^2 + 25\cdot 16 - 25x^2 = 25\cdot 9$$

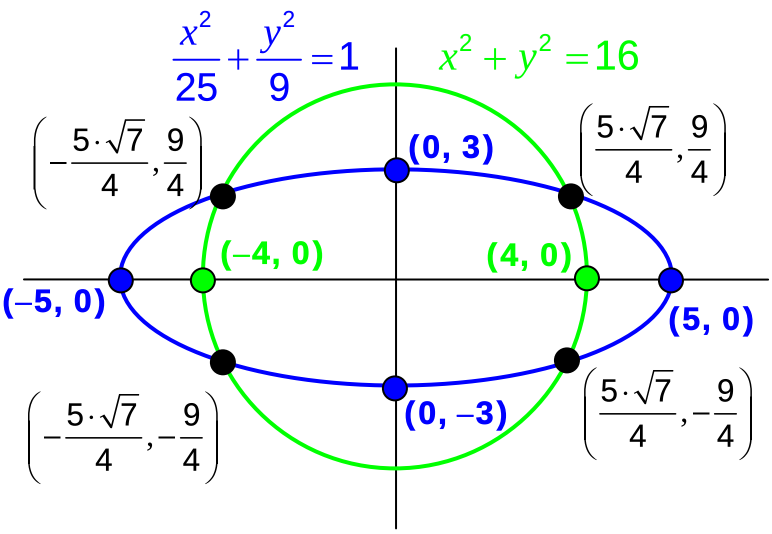
$$-16x^2 = 25\cdot 9 - 25\cdot 16 = 25\cdot(9-16) = -7\cdot 25 \Rightarrow x^2 = \frac{7\cdot 25}{16} \Rightarrow x = \pm\frac{5\cdot\sqrt{7}}{4}$$

$$y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow y^2 = 16 - \frac{7\cdot 25}{16} = \frac{16^2 - 7\cdot 25}{16} = \frac{81}{16} \Rightarrow y = \pm\frac{9}{4}$$

Los puntos de corte son:

$$\left(\frac{5\cdot\sqrt{7}}{4},\frac{9}{4}\right),\left(\frac{5\cdot\sqrt{7}}{4},-\frac{9}{4}\right),\left(-\frac{5\cdot\sqrt{7}}{4},\frac{9}{4}\right),\left(-\frac{5\cdot\sqrt{7}}{4},-\frac{9}{4}\right)$$

Gráficamente:



3.4-8 Calcula las coordenadas de los vértices y focos y la excentricidad de la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$. Dibújala.

Solución

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 = 25 \\ b^2 = 4 \end{array}\right\} \xRightarrow{c^2=a^2+b^2} c^2 = 25 + 4 = 29 \Rightarrow a = 5,\ \ b = 2,\ \ c = \sqrt{29}$$

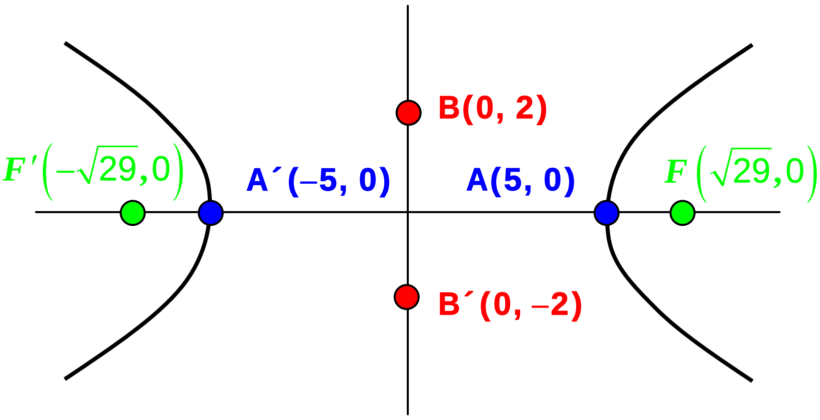
Como el centro de la hipérbola es el origen, las coordenadas de los vértices que determinan el eje real son $A(5,0)$, $A'(-5,0)$.

Análogamente, las coordenadas de los vértices que determinan el eje imaginario son $B(0,2)$, $B'(0,-2)$.

Las coordenadas de los focos vendrán dadas por la distancia focal $F\left(\sqrt{29},0\right)$, $F'\left(-\sqrt{29},0\right)$.

Finalmente, la excentricidad de la hipérbola será $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{29}}{5}$.

Podemos dibujar la hipérbola con todos estos datos:



3.4-9 Calcula las coordenadas de los vértices y focos y la excentricidad de la hipérbola de ecuación $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1$. Dibújala.

Solución

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2 = 16 \\ b^2 = 9 \end{matrix}\right\} \xRightarrow{c^2 = a^2 + b^2} c^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow a = 4, \quad b = 3, \quad c = 5$$

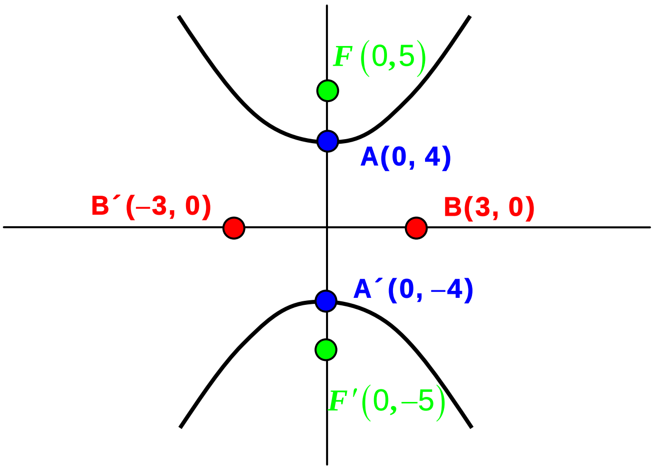
Como el centro de la hipérbola es el origen, las coordenadas de los vértices que determinan el eje real son $A(0,4)$, $A'(0,-4)$.

Análogamente, las coordenadas de los vértices que determinan el eje imaginario son $B(3,0)$, $B'(-3,0)$.

Las coordenadas de los focos vendrán dadas por la distancia focal $F(0,5)$, $F'(0,-5)$.

Finalmente, la excentricidad de la hipérbola será $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4}$.

Podemos dibujar la hipérbola con todos estos datos:



3.4-10 Halla los puntos de intersección de la circunferencia $x^2+y^2=25$ con la hipérbola $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

Solución

Resolvemos el sistema: $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{9}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow y^2=25-x^2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{25-x^2}{9}=1$

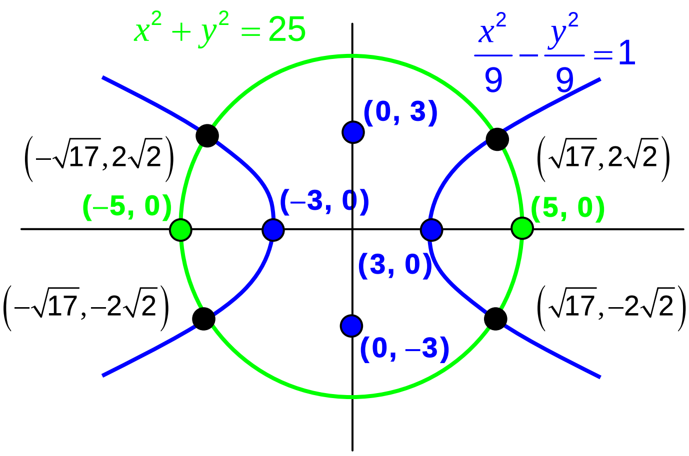
$$x^2-\left(25-x^2\right)=9 \Rightarrow x^2-25+x^2=9 \Rightarrow 2x^2=34 \Rightarrow x^2=17 \Rightarrow x=\pm\sqrt{17}$$

$$y^2=25-x^2 \Rightarrow y^2=25-17=8 \Rightarrow y=\pm\sqrt{8}=\pm 2\cdot\sqrt{2}$$

Los puntos de corte son:

$$\left(\sqrt{17},2\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{17},-2\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{17},2\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{17},-2\sqrt{2}\right)$$

Gráficamente:



3.4-11 Halla los puntos de intersección de la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ con la hipérbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$.

Solución

Resolvemos el sistema:

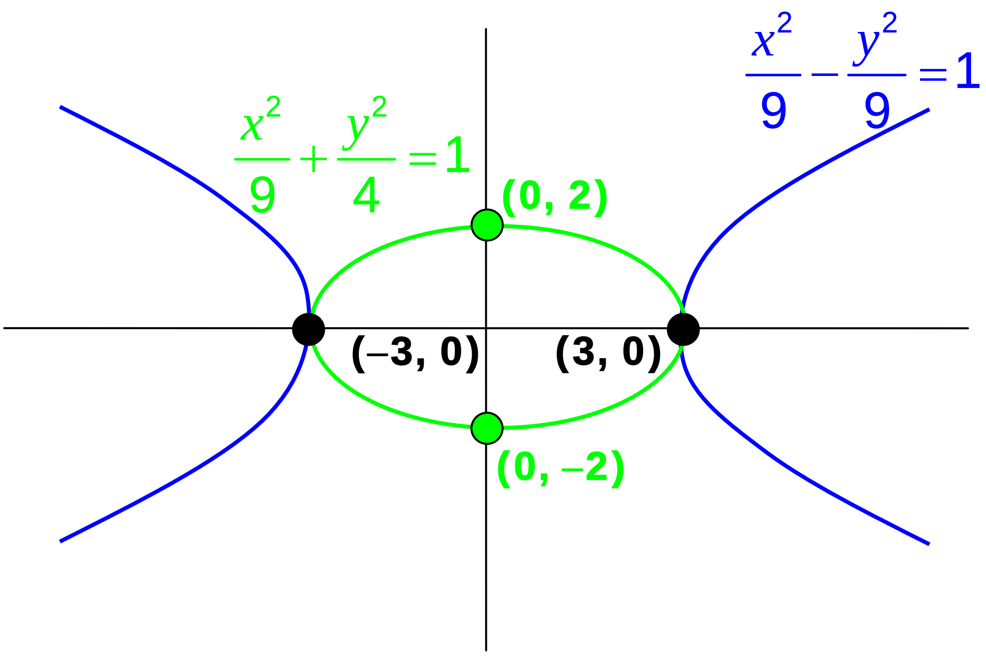
$$\left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1\end{array}\right\} \Rightarrow y^2=4\cdot\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\Rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{4\cdot\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}{9}=1$$

$$x^2-4\cdot\left(1-\frac{x^2}{9}\right)=9\Rightarrow x^2-4+\frac{4}{9}x^2=9\Rightarrow\frac{13}{9}x^2=13\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\pm 3$$

$$y^2=4\cdot\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\Rightarrow y^2=4\cdot\left(1-\frac{9}{9}\right)=0\Rightarrow y=0$$

Los puntos de corte son: $(3,0),(-3,0)$

Gráficamente:

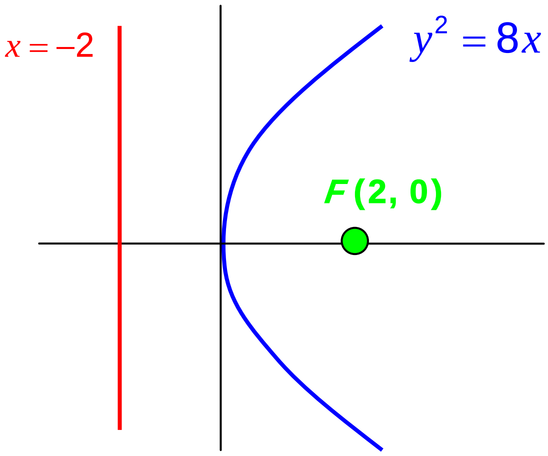


3.4-12 Dibuja la parábola $y^2 = 8x$.

Solución

$$2p = 8 \Rightarrow p = 4$$

Foco: $F\left(\frac{p}{2},0\right) = F(2,0)$ Directriz: $x = -\frac{p}{2} \Rightarrow x = -2$

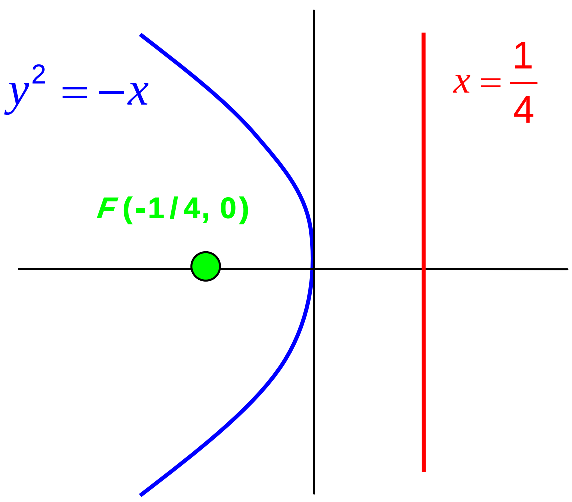


3.4-13 Dibuja la parábola $y^2 = -x$.

Solución

$$2p = 1 \Rightarrow p = 1/2$$

Foco: $F\left(-\frac{p}{2},0\right) = F\left(-\frac{1}{4},0\right)$ Directriz: $x = \frac{p}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

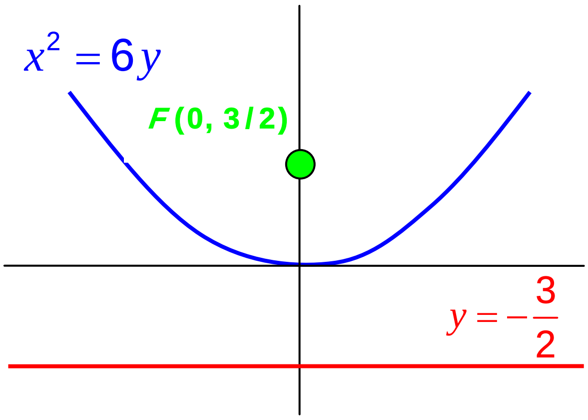


3.4-14 Dibuja la parábola $x^2 = 6y$.

Solución

$2p = 6 \Rightarrow p = 3$

Foco: $F\left(0, \frac{p}{2}\right) = F\left(0, \frac{3}{2}\right)$ Directriz: $y = -\frac{p}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$

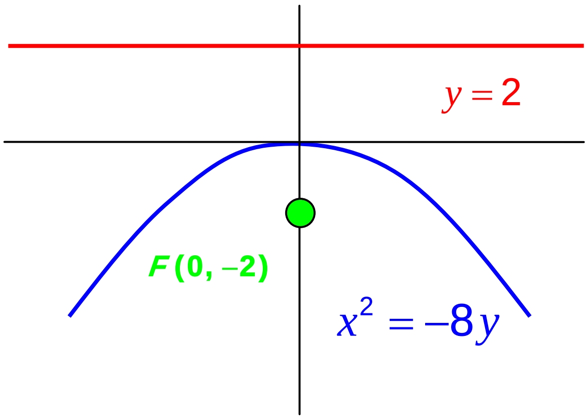


3.4-15 Dibuja la parábola $x^2 = -8y$.

Solución

$2p = 8 \Rightarrow p = 4$

Foco: $F\left(0, -\frac{p}{2}\right) = F(0, -2)$ Directriz: $y = \frac{p}{2} \Rightarrow y = 2$



3.4-16 Halla los puntos de intersección de la circunferencia $x^2+y^2=4$ con la parábola $y^2=3x$.

Solución

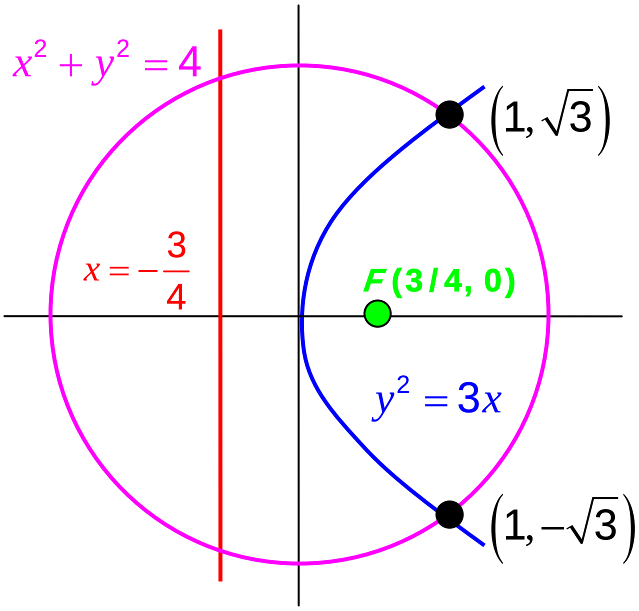
Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=4 \\ y^2=3x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+3x-4=0 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm 5}{2}=1,-4$$

$$x=1 \Rightarrow y^2=3 \Rightarrow y=\pm\sqrt{3} \Rightarrow \left(1,\sqrt{3}\right),\left(1,-\sqrt{3}\right)$$

$x=-4 \Rightarrow y^2=-12$ NO TIENE SOLUCIÓN REAL

Gráficamente:



3.4-17 Halla los puntos de intersección de la elipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ con la parábola $y^2=-6x$.

Solución

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1\\ y^2=-6x\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{6x}{9}=1\Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{2x}{3}=1\Rightarrow 3x^2-32x-48=0$$

$$x=\frac{32\pm\sqrt{1.024+576}}{6}=\frac{32\pm 40}{6}=12,-\frac{4}{3}$$

$$x=-\frac{4}{3}\Rightarrow y^2=8\Rightarrow y=\pm 2\sqrt{2}\Rightarrow\left(-\frac{4}{3},2\sqrt{2}\right),\left(-\frac{4}{3},-2\sqrt{2}\right)$$

$x=12\Rightarrow y^2=-72$ NO TIENE SOLUCIÓN REAL

Gráficamente: