Ejercicios resueltos

4.3-1 Deriva las siguientes expresiones:

$a)\ y = sen2x;\quad b)\ y = \cos(x-1);\quad c)\ y = \cos 3x^2;$

$d)\ y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+4}};\quad e)\ y = \left(\dfrac{3x-1}{x^2+3}\right)^2;\quad f)\ y = \sqrt{sen4x}$

Solución

$a)\ y = sen2x$. Derivada del seno por la derivada del ángulo:

$$y = sen2x \Rightarrow y' = \cos 2x \cdot (2x)' \Rightarrow y' = 2 \cdot \cos 2x$$

$b)\ y = \cos(x-1)$. Derivada del coseno por la derivada del ángulo:

$$y = \cos(x-1) \Rightarrow y' = -sen(x-1)\cdot(x-1)' \Rightarrow y' = -sen(x-1)$$

$c)\ y = \cos 3x^2$. Derivada del coseno por la derivada del ángulo:

$$y = \cos 3x^2 \Rightarrow y' = -sen3x^2 \cdot \left(3x^2\right)' \Rightarrow y' = -6x \cdot sen3x^2$$

$d)\ y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+4}}$. Derivada de un cociente:

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+4}} = \frac{x}{\left(x^2+4\right)^{1/3}}$$

$$y' = \frac{\left(x^2+4\right)^{1/3} - \left(\left(x^2+4\right)^{1/3}\right)' \cdot x}{\left(\left(x^2+4\right)^{1/3}\right)^2} = \frac{\left(x^2+4\right)^{1/3} - \frac{1}{3}x\cdot\left(x^2+4\right)^{-2/3}\cdot 2x}{\left(x^2+4\right)^{2/3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2+4\right)^{-2/3}\left[\frac{3\left(x^2+4\right)-2x^2}{\left(x^2+4\right)^{2/3}}\right] = \frac{x^2+12}{3\left(x^2+4\right)^{4/3}}$$

$e)\quad y=\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2$. Derivada de una potencia:

$$y'=2\cdot\frac{3x-1}{x^2+3}\cdot\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)'=$$

$$=2\cdot\frac{3x-1}{x^2+3}\cdot\frac{3\cdot\left(x^2+3\right)-2x\cdot(3x-1)}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{2(3x-1)\left(-3x^2+2x+9\right)}{\left(x^2+3\right)^3}$$

$f)\; y=\sqrt{sen4x}$. Derivada de una raíz cuadrada:

$$y=\sqrt{sen4x}\Rightarrow y=(sen4x)^{1/2}$$

$$y'=\frac{1}{2}\cdot(sen4x)^{-1/2}\cdot(sen4x)'=\frac{1}{2}(sen4x)^{-1/2}\cdot 4\cos 4x=\frac{2\cos 4x}{\sqrt{sen4x}}$$

4.3-2 Derivar:

$$y=x^x$$

Solución

Aplicamos logaritmos a los dos miembros de la igualdad:

$$\ln y=\ln x^x\Rightarrow \ln y=x\ln x$$

Derivamos los dos miembros de esta última igualdad:

$$(\ln y)'=(x\ln x)'\Rightarrow\frac{y'}{y}=\ln x+\frac{x}{x}\Rightarrow y'=y\cdot(\ln x+1)$$

$$y'=x^x\cdot(\ln x+1)$$

4.3-3 Derivar:

$$y=\frac{2}{\sqrt{3}}arctag\left(\frac{tag\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}arctag\left(\frac{tag\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2}}\right)$$

Solución

$$y' = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{1+\frac{tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{1+\frac{tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\left(3+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{\left(4+2tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{3\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+2tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Hemos de tener en cuenta que:

$$tg^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \Rightarrow tg^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Por lo tanto:

$$y' = \frac{1}{3\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+sen^2\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \left\{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+sen^2\left(\frac{x}{2}\right)=1\right\} =$$

$$= \frac{1}{1+2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2+2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \left\{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos x}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{1+1+\cos x} - \frac{1}{2+1+\cos x} = \frac{3+\cos x-(2+\cos x)}{(2+\cos x)(3+\cos x)} = \frac{1}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$$

4.3-4 Derivar:

$$y = arc.\cos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

Solución

Derivada del arco coseno:

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-2x\left(1+x^2\right)-2x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2x+2x^3+2x-2x^3}{\left(1+x^2\right)^2\sqrt{1-\frac{1-2x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}}} =$$

$$= \frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2\sqrt{\frac{4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}} = \frac{4x}{2x\left(1+x^2\right)} = \frac{2}{1+x^2}$$

4.3-5 Derivar:

$$y = \left(1+\sqrt{1+x}\right)^{3/2} - 3\left(1+\sqrt{1+x}\right)^{1/2}$$

solución

Derivada de potencias:

$$y' = \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{1+x}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{1+x}\right)^{-1/2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x}} =$$

$$= \frac{3}{4\sqrt{1+x}}\left(\sqrt{1+\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}\right) = \frac{3}{4\sqrt{1+x}}\left(\frac{1+\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}\right) =$$

$$= \frac{3}{4\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$$

4.3-6 Derivar:

$$y = \ln\left[\frac{1-tag^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tag^2\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot e^{x\cos x}\right]$$

Solución

Antes de derivar operamos:

$$\frac{1-tag^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tag^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1-\frac{sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{1+\frac{sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}=\frac{\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}=$$

$$=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-sen^2\left(\frac{x}{2}\right)=\cos x$$

Sustituyendo este valor, nuestro problema se convierte en:

$$y=\ln\left[\cos x\cdot e^{x\cos x}\right]=\ln(\cos x)+\ln\left(e^{x\cos x}\right)=x\cos x+\ln(\cos x)$$

Ahora derivamos esta expresión:

$$y'=\cos x-xsenx+\frac{-senx}{\cos x}\Rightarrow y'=\cos x-xsenx-tagx$$

4.3-7 Derivar:

$$y=arctagx+arctag\left(\frac{1}{x}\right)+arcsenx+\arccos\sqrt{1-x^2}$$

Solución

$$y'=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)}\cdot\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-1}{\sqrt{1-\left(1-x^2\right)}}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

4.3-8 Derivar:

$$y = \ln \sqrt[3]{1-x^4}$$

Solución

$$y = \ln \sqrt[3]{1-x^4} \Rightarrow y = \frac{1}{3}\ln\left(1-x^4\right)$$

Derivamos esta última expresión:

$$y' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1-x^4\right)}\cdot\left(-4x^3\right) = -\frac{4x^3}{3\left(1-x^4\right)}$$