Tema 4 Aplicaciones de la derivada

Ejercicios resueltos

4.4-1 Resolver los siguientes límites aplicando la regla de L'Hôpital:

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{senx}{x};\quad b)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{senx};\quad c)\ \lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt[x]{e}-1\right);\quad d)\ \lim\limits_{x\to 0}(x)^x$

$e)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2};\quad f)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(senx)}{\ln(tagx)};\quad g)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-cotagx\right)$

Solución

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{senx}{x}$

Indeterminación de la forma $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Para evitarla, derivamos numerador y denominador y sustituimos x por cero:

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

$b)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{senx}$

Indeterminación de la forma $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Para evitarla, derivamos numerador y denominador y sustituimos x por cero:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{senx}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$$

$c)\ \lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt[x]{e}-1\right)$

Indeterminación de la forma $\{\infty\cdot 0\}$. Para evitarla, operamos para llegar a la indeterminación $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ o $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ y aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[x]{e}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$$

d) $\lim\limits_{x\to 0}(x)^x$

Indeterminación de la forma 0^0. Para evitarla, operamos para llegar a la indeterminación $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ o $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ y aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}(x)^x = k \Rightarrow \ln k = \ln\left(\lim_{x\to 0}(x)^x\right) = \lim_{x\to 0}\ln\left((x)^x\right) = \lim_{x\to 0} x\ln x$$

Por lo tanto: $\ln k = \lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

$$\ln k = 0 \Rightarrow k = e^0 = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}(x)^x = 1$$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Indeterminación de la forma $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Para evitarla, derivamos numerador y denominador dos veces y sustituimos x por cero:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{senx}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(senx)}{\ln(tagx)}$

Indeterminación de la forma $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Para evitarla, derivamos numerador y denominador y sustituimos x por cero:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(senx)}{\ln(tagx)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{senx}}{\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\, tagx}{\frac{senx}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{senx}{\frac{senx}{\cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\cos^2 x = 1$$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - cotagx\right)$

Indeterminación de la forma $\{\infty - \infty\}$. Para evitarla, operamos para llegar a la indeterminación $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ o $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ y aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-cotagx\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{senx}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{senx-x\cos x}{x\cdot senx}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+xsenx}{senx+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{xsenx}{senx+x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{senx+x\cos x}{\cos x+\cos x-xsenx}=\frac{0}{2}=0$$

4.4-2 Una compañía farmacéutica va a lanzar al mercado un nuevo medicamento para uso veterinario. Los costes fijos de marketing, diseño del envase, representantes, etc. suponen 6.000 €. La fabricación de cada envase de medicamento tiene un coste de 2,5 € por unidad. Si cada envase se vende a las distribuidoras a un precio de 4 €, ¿cuántos envases debe vender la compañía para estar en el punto de equilibrio (cuál es el número de envases por debajo del cuál tendrán pérdidas y por encima beneficios)?

Solución

¿ x / Costos totales = Ingresos ?
¿ x / 6.000 + 2,5 x = 4x ?
Resolviendo esta ecuación se deduce que x = 4.000
Luego, el punto de equilibrio es 4.000 (nº de envases a partir del que tendrán beneficios)

4.4-3 Un productor de nueces estima, de la experiencia de los años anteriores, que si se plantan 50 árboles por hectárea, cada árbol producirá en promedio 60 kilos de nueces cada año. Si por cada árbol adicional que se planta por hectárea la producción promedio por árbol desciende 1 kilo, ¿cuántos árboles debe plantar para maximizar la producción por hectárea? ¿Cuál es esa producción máxima?

Solución

x = nº de árboles adicionales
P = producción por hectárea

$$P=(50+x)(60-x)=3.000+10x-x^2$$

Derivando P y resolviendo la ecuación que proporciona la primera derivada igual a cero obtenemos los puntos críticos:

$$P' = \left(3.000 + 10x - x^2\right)' = 10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5$$

Luego x = 5 proporciona el máximo, con un número de árboles de 50+5 = 55 y una producción por hectárea que obtenemos sustituyendo el valor x = 5 en P:

$$P(5) = 3.025$$

La segunda derivada negativa asegura que el punto x = 5 es máximo:

$$P'' = \left(3.000 + 10x - x^2\right)'' = \left(10 - 2x\right)' = -2 < 0$$

4.4-4 La compañía farmacéutica crece y dispone de un departamento de investigación de mercados y un departamento económico. El departamento de investigación de mercados recomienda a la Gerencia que fabrique y venda un nuevo fármaco prometedor con la siguiente ecuación de demanda:

$$x = f(p) = 6.000 - 30p$$

donde *x* es el número de unidades que los distribuidores comprarán cada mes a un precio de *p* € por unidad. Observa que a medida que el precio sube, el número de unidades disminuye.
Del departamento económico se obtuvo la siguiente ecuación de coste:

$$C = g(x) = 72.000 + 60x$$

donde 72.000 € es el coste fijo (manufactura y gastos generales) y 60 € es el costo variable por unidad (materia prima, ventas, transporte, almacenamiento, etc.)

- Escribir la ecuación de ingresos (cantidad de dinero, *I*, que recibe la compañía por vender *x* unidades a un precio de *p* € por unidad).
- Escribir la ecuación de rentabilidad (*R*) como la diferencia entre ingresos y costes.
- Dibujar las gráficas de *C* e *I* (como función de *p*) en el mismo sistema de coordenadas. ¿Cuáles son los puntos de equilibrio? ¿Dónde los observamos gráficamente? ¿Cuál es su valor?
- ¿A qué precio se presentará la máxima rentabilidad?

Solución

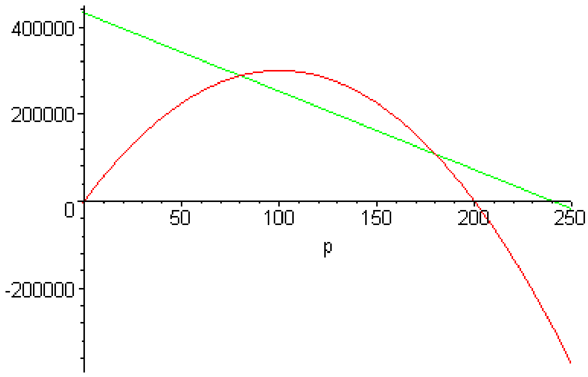
$$x = 6.000 - 30p$$

$$In = \left(6.000 - 30p\right) \cdot p = 6.000p - 30p^2$$

$$C = 72.000 + 60x = 432.000 - 1.800p$$

$$R = In - C$$

$$R = \left(6.000 - 30p\right)p - 432.000 + 1.800p = 7.800p - 30p^2 - 432.000$$



Los puntos de equilibrio se dan en la intersección de las dos gráficas. Hemos de resolver la ecuación Ingresos = Costes

$$6.000\,p - 30\,p^2 = 432.000 - 1.800\,p \Rightarrow p = 180{,}80$$

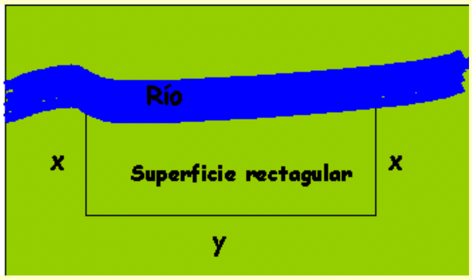
La máxima rentabilidad la obtendremos derivando R y resolviendo la ecuación que proporciona la primera derivada igual a cero:

$$\left(7.800\,p - 30\,p^2 - 432.000\right)' = -60\,p + 7.800$$
$$-60\,p + 7.800 = 0 \Rightarrow p = 130$$

Por tanto *p* = 130 € es el valor que hace máxima la rentabilidad. Comprobamos que es máximo con la segunda derivada:

$$\left(7.800\,p - 30\,p^2 - 432000\right)'' = \left(-60\,p + 7.800\right)' = -60 < 0$$

4.4-5 En una explotación ganadera se dispone de 20 km de alambrada para delimitar un terreno rectangular a lo largo de un río. Si no fuera necesario que existiera alambrada a la orilla del río, ¿cuál sería el perímetro del rectángulo que produciría el área máxima? ¿Cuál es ese área máxima?



Observación: Suponer que la orilla del río es recta y por tanto la superficie a delimitar es totalmente rectangular.

Solución

$$\acute{a}rea = a = x \cdot y$$

$$per\acute{\imath}metro = 2x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - 2x$$

Luego:

$$\acute{a}rea = a = x \cdot y = x \cdot (20 - 2x) = 20x - 2x^2$$

Derivando el área y resolviendo la ecuación que proporciona la primera derivada igual a cero obtenemos los puntos críticos:

$$\left(20x - 2x^2\right)' = 20 - 4x \Rightarrow x = 5$$

Luego x = 5 proporciona el máximo. Sustituyendo, obtenemos el valor de y:

$$y = 10$$

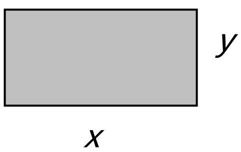
La segunda derivada negativa asegura que el punto x = 5 es máximo:

$$\left(20x - 2x^2\right)'' = (20 - 4x)' = -4 < 0$$

4.4-6 En una explotación ganadera de vacuno se dispone de 400 m de alambre para construir una cerca rectangular. Si a cada animal hay que dejarle 10 m^2 de espacio, ¿cuántas vacas podremos meter dentro de la cerca?

Solución

Debemos encontrar el área máxima encerrada por la cerca de 400 m de perímetro. Si llamamos x e y a los lados del rectángulo, A al área y P al perímetro, tenemos:



$$A = xy$$
$$P = 2x + 2y = 400$$

Despejamos en la expresión del perímetro y en función de x para encontrar una relación entre las dos variables y sustituimos en el área. Así, expresamos el área en función de x y derivamos para obtener el máximo:

$$400=2x+2y \Rightarrow y=200-x \Rightarrow A=xy=x(200-x)=200x-x^2$$

$$A'=200-2x\ ;\ A'=0 \Rightarrow 200-2x=0 \Rightarrow x=100$$

x = 100 es un punto crítico. Si la segunda derivada es menor que cero en este punto, será máximo:

$$A''=-2<0, \text{luego máximo}$$

Sustituimos el valor máximo de x para obtener el correspondiente valor de y:

$$y=200-x=200-100=100$$

Por tanto el área máxima será: $A=xy=100\cdot 100=10.000\ \text{m}^2$

Si cada vaca ocupa 10 m^2, dividiendo obtendremos el número máximo de vacas que podemos encerrar en la cerca:

10.000 / 10 = **1.000 vacas**

4.4-7 La concentración de oxígeno en un estanque contaminado con un residuo orgánico viene dada por la ecuación:

$$f(t)=\frac{t^2-t+1}{t^2+1}, 0\le t\le\infty$$

donde t representa el tiempo en semanas. Hallar los instantes en los que se alcanzan las concentraciones máxima y mínima de oxígeno (como extremos absolutos). Representar gráficamente la función $f(t)$

Solución

Derivamos la función $f(t)$ e igualamos a cero la derivada:

$$f'(t)=\frac{(2t-1)(t^2+1)-2t(t^2-t+1)}{(t^2+1)^2}=\frac{2t^3+2t-t^2-1-2t^3+2t^2-2t}{(t^2+1)^2}=\frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}$$

$$f'(t)=0 \Rightarrow \frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}=0 \Rightarrow t=1, t=-1$$

Como t no puede ser negativo, solo se acepta el valor t =1. Hacemos la segunda derivada para decidir si se trata de un máximo o mínimo:

$$f''(t) = \frac{2t\left(t^2+1\right)^2 - 2\left(t^2+1\right)2t\left(t^2-1\right)}{\left(t^2+1\right)^4} = \frac{2t\left(t^2+1\right) - 4t\left(t^2-1\right)}{\left(t^2+1\right)^3} =$$

$$= \frac{2t^3+2t-4t^3+4t}{\left(t^2+1\right)^3} = \frac{6t-2t^3}{\left(t^2+1\right)^3}$$

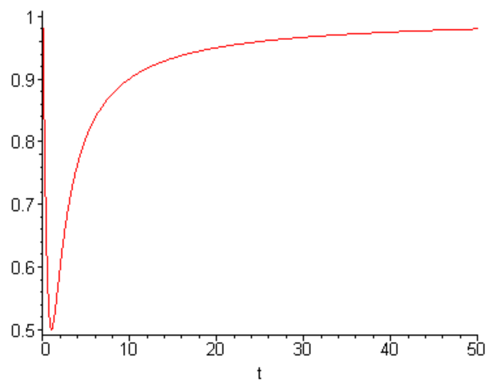
Sustituyendo t = 1 en la segunda derivada: $f''(1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Como la segunda derivada es positiva para t = 1, se alcanza un mínimo. Observamos que la función es continua en el intervalo de definición dado. Puesto que en t = 1 hay un mínimo, desde 0 hasta 1 la función decrece y de 1 hasta infinito la función crece.

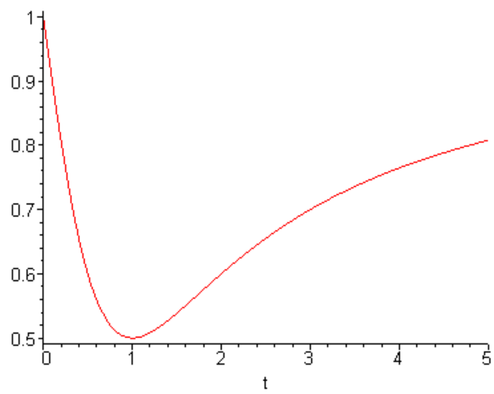
Calcularemos el límite cuando t tiende a infinito: $\lim_{t\to\infty} \frac{t^2-t+1}{t^2+1} = 1$

Por tanto se trata de una función acotada superiormente por el valor 1, que solo lo alcanza si t = 0, por lo que este es el máximo de la función.

Para estudiar la gráfica de la función, la dibujamos en varios rangos. Observamos bien la asíntota horizontal en $f(t)$=1:



Observamos bien el mínimo para t = 1:



4.4-8 El número de kilos de melocotones, *P*, que se producen en un campo frutal depende del número de kilos de insecticida *x* con el que se fumigan los árboles, de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$P(x) = 300 - \frac{100}{1+x}$$

Dibujar la gráfica de la función P(x) que representa el peso.

Solución

Dominio de definición:

$D(P) = \mathbb{R} - \{-1\}$. Puesto que la función representa peso, sólo tiene sentido dibujar la gráfica para $x \geq 0$.

Simetrías:

$P(-x) = 300 - \dfrac{100}{1-x} \neq -P(x), P(x) \Rightarrow$ luego no hay simetrías.

Periodicidad:

$P(x+k) = 300 - \dfrac{100}{1+x+k} \neq P(x) \Rightarrow$ luego no es periódica.

Asíntotas:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} \left(300 - \dfrac{100}{1+x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \left(300 - \dfrac{100}{1+x}\right) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$ hay una asíntota **vertical** en $x = -1$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(300 - \dfrac{100}{1+x}\right) = 300 \Rightarrow$ hay una asíntota **horizontal** en $y = 300$

$\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{P(x)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{300}{x} - \dfrac{100}{x+x^2}\right) = 0 \Rightarrow$ no hay asíntotas **oblicuas**

Cortes con los ejes:

$x = 0 \Rightarrow P(0) = 300 - \dfrac{100}{1} = 200 \Rightarrow$ el punto (0 , 200) es un corte con el eje OY

$y = 0 \Rightarrow 0 = 300 - \dfrac{100}{1+x} \Rightarrow x = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow$ el punto $\left(-\dfrac{2}{3}, 0\right)$ es un corte con el eje OX

Máximos, mínimos y puntos de inflexión:

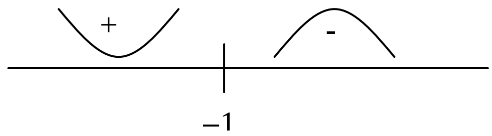
$P(x) = 300 - \dfrac{100}{1+x} \Rightarrow P'(x) = \dfrac{100}{(1+x)^2} \neq 0, \forall x \Rightarrow$ no hay puntos críticos.

Crecimiento y decrecimiento:

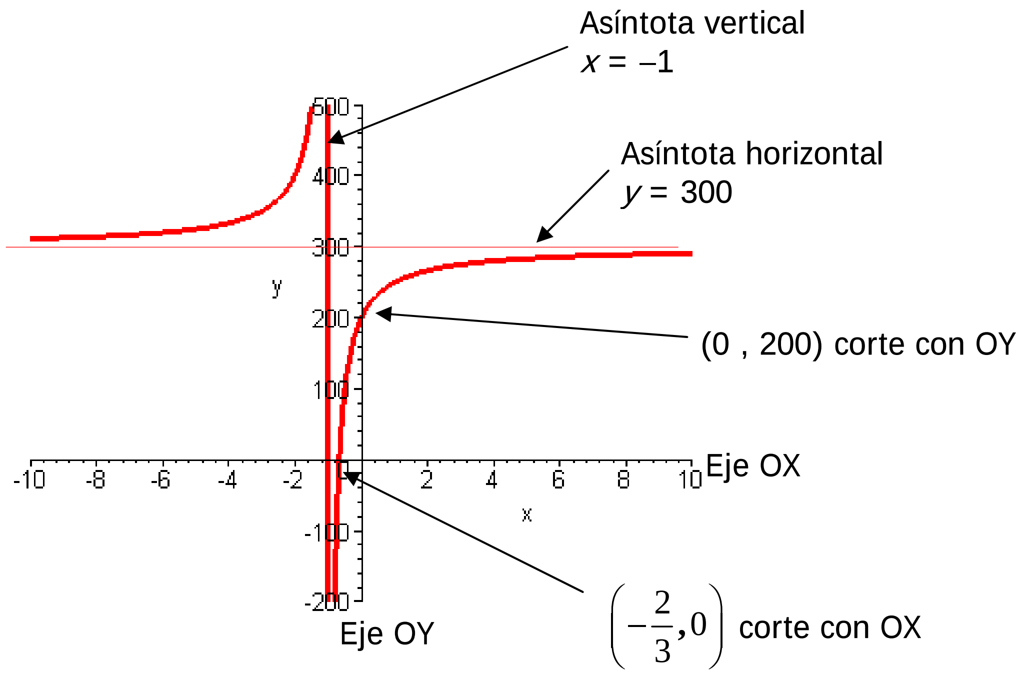
$P'(x) = \dfrac{100}{(1+x)^2} > 0, \forall x \Rightarrow$ la función es siempre creciente

Concavidad y convexidad:

$P''(x) = -\dfrac{200}{(1+x)^3} \Rightarrow$



Con todos estos datos se dibuja fácilmente la gráfica:



Sólo tiene sentido dibujar la función para $x \geq 0$: