Ejercicios resueltos

4.5-1 Estudia y representa la función $f(x)=\dfrac{\left|x^2-3x+2\right|+\left|x^2-1\right|}{|x|}$

Solución

Hemos de tener en cuenta la definición de valor absoluto para ver en que conjunto de funciones se transforma la función dada. Recordemos:

$$|x|=\begin{cases} x & \textit{si } x\geq 0 \\ -x & \textit{si } x\leq 0 \end{cases}$$

Calculamos los puntos en los que se anula cada valor absoluto:

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}\Rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=1 \end{cases}$$

$$x^2-1=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1= \ \ 1 \\ x_2=-1 \end{cases}$$

$$(-\infty,-1)\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-3x+2>0 \\ x^2-1>0 \\ x<0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=\frac{\left(x^2-3x+2\right)+\left(x^2-1\right)}{-x}=\frac{2x^2-3x+1}{-x}$$

$$(-1,0)\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-3x+2>0 \\ x^2-1<0 \\ x<0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=\frac{\left(x^2-3x+2\right)-\left(x^2-1\right)}{-x}=\frac{-3x+3}{-x}$$

$$(0,1)\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-3x+2>0 \\ x^2-1<0 \\ x>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=\frac{\left(x^2-3x+2\right)-\left(x^2-1\right)}{x}=\frac{-3x+3}{x}$$

$$(1,2)\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-3x+2<0 \\ x^2-1>0 \\ x>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=\frac{-\left(x^2-3x+2\right)+\left(x^2-1\right)}{x}=\frac{3x-3}{x}$$

$$(2,+\infty) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2-3x+2>0 \\ x^2-1>0 \\ x>0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x)=\frac{(x^2-3x+2)+(x^2-1)}{x}=\frac{2x^2-3x+1}{x}$$

Es decir:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2-3x+1}{-x} & para \quad -\infty<x<-1 \\ \dfrac{-3x+3}{-x} & para \quad -1<x<0 \\ \dfrac{-3x+3}{x} & para \quad 0<x<1 \\ \dfrac{3x-3}{x} & para \quad 1<x<2 \\ \dfrac{2x^2-3x+1}{x} & para \quad 2<x<+\infty \end{cases}$$

Dominio: $\mathbb{R}-\{0\}$

Continuidad:
La función es **discontinua** en el punto **x = 0**
Posibles puntos de discontinuidad: **x = –1, 1, 2**. Veamos si los límites laterales coinciden:

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{-x}\right)=6 \\ \lim\limits_{x\to -1^+}\left(\dfrac{-3x+3}{-x}\right)=6 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{La función es continua en el punto } \mathbf{x = -1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{-3x+3}{x}\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{3x-3}{x}\right)=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{La función es continua en el punto } \mathbf{x = 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{3x-3}{x}\right)=\dfrac{3}{2} \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{x}\right)=\dfrac{3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{La función es continua en el punto } \mathbf{x = 2}$$

La función dada es continua en todo el dominio, es decir $\mathbb{R}-\{0\}$.

Simetrías: No tiene.

Puntos de corte con los ejes:

$$f(x)=0\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2x^2-3x+1}{-x}=0 & \Rightarrow & \begin{cases}x_1=1\notin(-\infty,-1)\\ x_2=0.5\notin(-\infty,-1)\end{cases}\\ \dfrac{-3x+3}{-x}=0 & \Rightarrow & x=1\notin(-1,0)\\ \dfrac{-3x+3}{x}=0 & \Rightarrow & x=1\notin(0,1)\\ \dfrac{3x-3}{x}=0 & \Rightarrow & x=1\notin(1,2)\\ \dfrac{2x^2-3x+1}{x}=0 & \Rightarrow & \begin{cases}x_1=1\notin(2,+\infty)\\ x_2=0.5\notin(2,+\infty)\end{cases}\end{cases}$$

$$x=-1\Rightarrow y=6$$

$x=1\Rightarrow y=0\Rightarrow(1,0)$ punto de corte

$$x=2\Rightarrow y=\frac{3}{2}$$

Asíntotas:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{-x}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{x}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \text{No existen asíntotas horizontales}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{-3x+3}{-x}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{-3x+3}{x}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Asíntotas verticales: } x=0$$

$$\left.\begin{array}{l}m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{-x^2}\right)=-2\\ n=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{-x}+2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-3x+1}{-x}\right)=3\end{array}\right\}\Rightarrow$$

Asíntota oblicua: $y=-2x+3$

$$\left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2}\right)=2 \\ n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{x}-2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-3x+1}{x}\right)=-3 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

Asíntota oblicua: $y=2x-3$

Función derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-2x^2+1}{x^2} & para \quad -\infty<x<-1 \\ \dfrac{3}{x^2} & para \quad -1<x<0 \\ -\dfrac{3}{x^2} & para \quad 0<x<1 \\ \dfrac{3}{x^2} & para \quad 1<x<2 \\ \dfrac{2x^2-1}{x^2} & para \quad 2<x<+\infty \end{cases}$$

Estudiemos la derivabilidad en $x=-1$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1)^-=-1 \\ f'(-1)^+=3 \end{array}\right\}\Rightarrow f'(-1)^-\neq f'(-1)^+\Rightarrow \text{función no derivable en } x=-1$$

Estudiemos la derivabilidad en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)^-=-3 \\ f'(1)^+=3 \end{array}\right\}\Rightarrow f'(1)^-\neq f'(1)^+\Rightarrow \text{función no derivable en } x=1$$

Estudiemos la derivabilidad en $x=2$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2)^-=\dfrac{3}{4} \\ f'(2)^+=\dfrac{7}{4} \end{array}\right\}\Rightarrow f'(2)^-\neq f'(2)^+\Rightarrow \text{función no derivable en } x=2$$

Puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=0\Rightarrow -2x^2+1=0\Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\notin(-\infty,-1) \\ f'(x)=0\Rightarrow 2x^2-1=0\Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\notin(2,+\infty) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

Esto indica que no tiene máximos ni mínimos. Los únicos puntos críticos son aquellos en que no existe la derivada, $x=-1,1,2$

Crecimiento y decrecimiento:

Estudiemos los puntos en que no está definida la función derivada.

$$f(-1)=6 \Rightarrow \begin{cases} f'(-1-\varepsilon)=\dfrac{-2(-1-\varepsilon)^2+1}{(-1-\varepsilon)^2}<0 \Rightarrow f(x) \quad \textit{decreciente} \\ f'(-1+\varepsilon)=\dfrac{3}{(-1+\varepsilon)^2}>0 \Rightarrow f(x) \quad \textit{creciente} \end{cases}$$

La función es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha del punto $x=-1$. La función presenta un punto anguloso mínimo en $x=-1$

$$f(1)=0 \Rightarrow \begin{cases} f'(1-\varepsilon)=-\dfrac{3}{(1-\varepsilon)^2}<0 \Rightarrow f(x) \quad \textit{decreciente} \\ f'(1+\varepsilon)=\dfrac{3}{(1+\varepsilon)^2}>0 \Rightarrow f(x) \quad \textit{creciente} \end{cases}$$

La función es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha del punto $x=1$. La función presenta un punto anguloso mínimo en $x=1$

$$f(2)=\frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} f'(2-\varepsilon)=\dfrac{3}{(2-\varepsilon)^2}>0 \Rightarrow f(x) \quad \textit{creciente} \\ f'(2+\varepsilon)=\dfrac{2\cdot(2+\varepsilon)^2-1}{(2+\varepsilon)^2}>0 \Rightarrow f(x) \quad \textit{creciente} \end{cases}$$

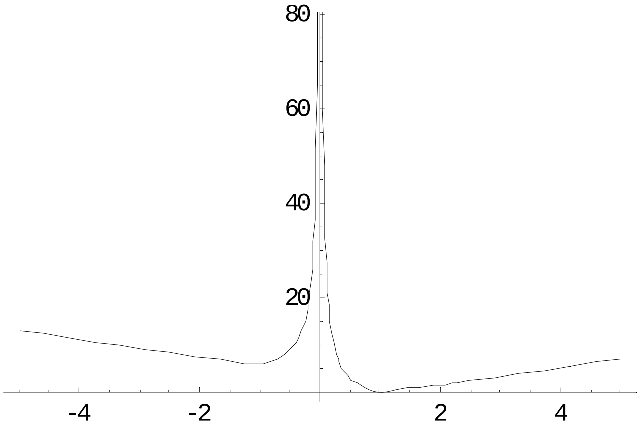
La función es creciente a la izquierda y a la derecha del punto $x=2$. La función no presenta ni máximo ni mínimo en el punto anguloso $x=2$

Concavidad y Convexidad:

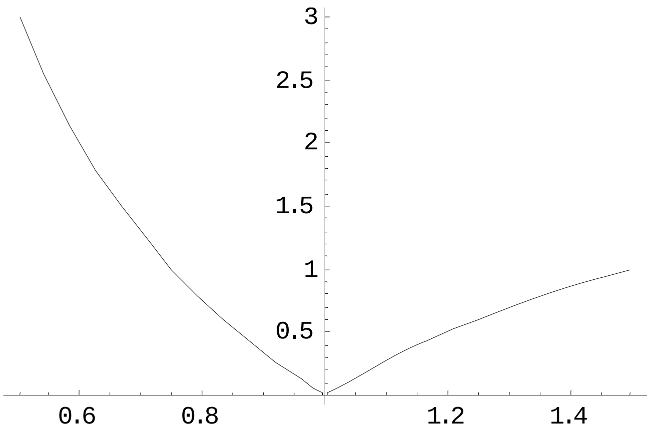
$$f''(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{x^3} & \textit{para} & -\infty<x<-1 \\ -\dfrac{6}{x^3} & \textit{para} & -1<x<0 \\ \dfrac{6}{x^3} & \textit{para} & 0<x<1 \\ -\dfrac{6}{x^3} & \textit{para} & 1<x<2 \\ \dfrac{2}{x^3} & \textit{para} & 2<x<+\infty \end{cases} \Rightarrow f''(x)=\begin{cases} >0 & \textit{para} & -\infty<x<-1 \\ >0 & \textit{para} & -1<x<0 \\ >0 & \textit{para} & 0<x<1 \\ <0 & \textit{para} & 1<x<2 \\ >0 & \textit{para} & 2<x<+\infty \end{cases}$$

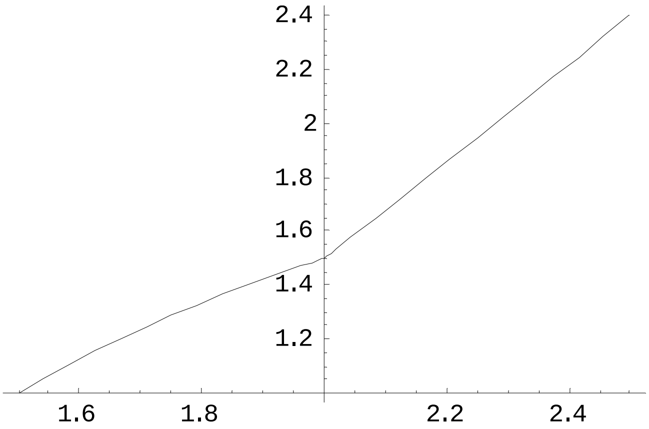
Hay cambios en la concavidad en $x = 1$ y en $x = 2$ que son los puntos de inflexión de la función.

Representación gráfica:



Podemos visualizar lo que ocurre en los puntos $x = 1$ y $x = 2$





4.5-2 Estudia y representa la función $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-2)\cdot(x-6)}$

Solución

Dominio: $\mathbb{R}-\{2,6\}$

Continuidad:
La función es **discontinua** en los puntos **x = 2, 6**
La función dada es continua en todo el dominio, es decir $\mathbb{R}-\{2,6\}$.

Simetrías: No tiene.

Puntos de corte con los ejes:

$$f(x)=\frac{x^2}{(x-2)\cdot(x-6)}=0\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0\Rightarrow(0,0)$$

Asíntotas:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-2)\cdot(x-6)}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-2)\cdot(x-6)}\right)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y=1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{x^2}{(x-2)\cdot(x-6)}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left(\dfrac{x^2}{(x-2)\cdot(x-6)}\right)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Asíntota vertical: } x=2$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to6^-} f(x)=\lim\limits_{x\to6^-}\left(\dfrac{x^2}{(x-2)\cdot(x-6)}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to6^+} f(x)=\lim\limits_{x\to6^+}\left(\dfrac{x^2}{(x-2)\cdot(x-6)}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Asíntota vertical: } x=6$$

$$\left.\begin{array}{l}m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{(x-2)\cdot(x-6)}\right)=0\\ m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{(x-2)\cdot(x-6)}\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas}$$

Función derivada:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x-2)\cdot(x-6)-(2x-8)\cdot x^2}{(x-2)^2\cdot(x-6)^2}=\frac{8x\cdot(3-x)}{(x-2)^2\cdot(x-6)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(24-16x)\cdot(x-2)^2\cdot(x-6)^2}{(x-2)^4\cdot(x-6)^4}+$$
$$+\frac{-8x\cdot(3-x)\cdot\left[2\cdot(x-2)\cdot(x-6)^2+2\cdot(x-2)^2\cdot(x-6)\right]}{(x-2)^4\cdot(x-6)^4}$$

$$f''(x)=\frac{8\cdot(x-2)\cdot(x-6)\cdot\left[(3-2x)\cdot(x-2)\cdot(x-6)-x\cdot(3-x)\cdot(4x-16)\right]}{(x-2)^4\cdot(x-6)^4}$$

$$f''(x)=\frac{8\cdot\left(2x^3-9x^2+36\right)}{(x-2)^3\cdot(x-6)^3}$$

Puntos críticos:

$$f'(x)=0\Rightarrow 8x\cdot(3-x)=0\Rightarrow x=0,3$$

$$f''(0)=\frac{8\cdot 36}{(-2)^3\cdot(-6)^3}>0\Rightarrow \text{ en } x=0 \text{ hay un mínimo relativo}$$

$$f''(3)=\frac{8\cdot 9}{1^3\cdot(-3)^3}<0\Rightarrow \text{ en } x=3 \text{ hay un máximo relativo}$$

Crecimiento y decrecimiento:

Construimos un cuadro con el signo de $f'(x)$ en los intervalos en que queda dividida la recta real a través de los puntos críticos $x=0,3$ y los puntos donde no existe la primera derivada $x=2,6$:

	$-\infty$ — 0	0 — 2	2 — 3	3 — 6	6 — $+\infty$
$f'(x)$	< 0	> 0	> 0	< 0	< 0
$f(x)$	decrece	crece	crece	decrece	decrece

Puntos de inflexión:

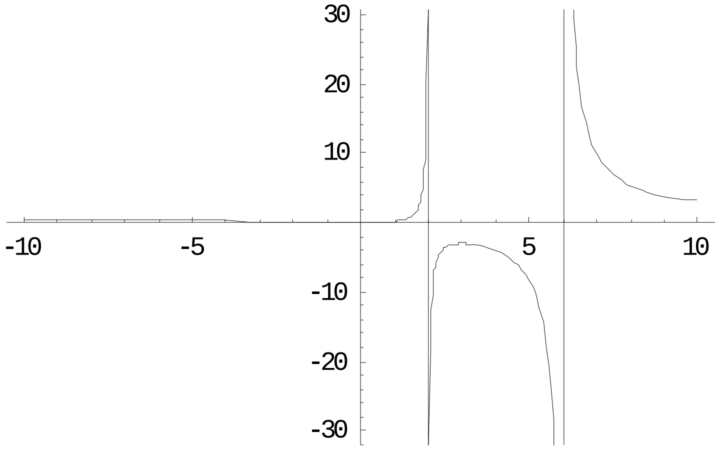
$$f''(x)=0\Rightarrow 2x^3-9x^2+36=0\Rightarrow x=-1.70342\approx-1.7 \text{ es la única raíz real}$$

Concavidad y Convexidad:

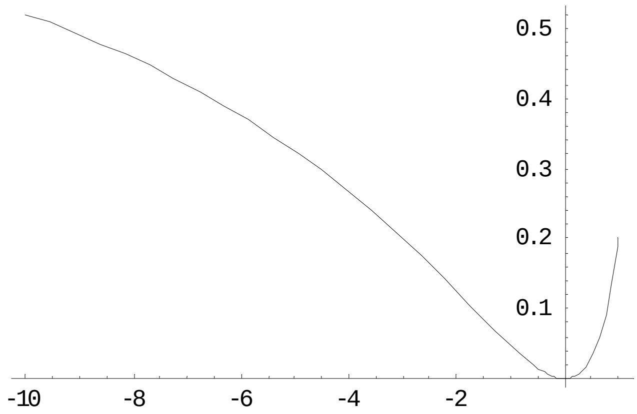
Construimos un cuadro con el signo de $f''(x)$ en los intervalos en que queda dividida la recta real a través del punto de inflexión, $x=-1.7$, y los puntos donde no existe la segunda derivada $x=2,6$:

	$-\infty$ -1.7	-1.7 2	2 6	6 $+\infty$
$f''(x)$	< 0	> 0	< 0	> 0
$f(x)$	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba

Representación gráfica:



Podemos visualizar lo que ocurre en el punto $x=-1.7$



4.5-3 Estudia y representa la función $f(x)=|x^2-6x+5|$

Solución

Hemos de tener en cuenta la definición de valor absoluto para ver en que conjunto de funciones se transforma la función dada. Recordemos:

$$|x|=\begin{cases} x & si\ \ x\geq 0 \\ -x & si\ \ x\leq 0 \end{cases}$$

Calculamos los puntos en los que se anula este valor absoluto:

$$x^2-6x+5=0\Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\frac{6\pm 4}{2}\Rightarrow\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=1 \end{cases}$$

$$(-\infty,1)\Rightarrow x^2-6x+5>0\Rightarrow f(x)=x^2-6x+5$$
$$(1,5)\Rightarrow x^2-6x+5<0\Rightarrow f(x)=-x^2+6x-5$$
$$(5,+\infty)\Rightarrow x^2-6x+5>0\Rightarrow f(x)=x^2-6x+5$$

Dominio: $\mathbb{R}$

Continuidad:
La función es **continua** en todo el dominio, es decir $\mathbb{R}$.

Simetrías: No tiene.

Puntos de corte con los ejes:

$$\left.\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=5 \\ y=0\Rightarrow x=1,5 \end{array}\right\}\Rightarrow(0,5),(1,0),(5,0)$$

Asíntotas:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-6x+5\right)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-6x+5\right)=+\infty \end{array}\right\}\Rightarrow \text{No existen asíntotas horizontales}$$

No existen asíntotas verticales, ya que la función es continua en todo su dominio.

$$\left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-6x+5}{x}\right)=-\infty \\ m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-6x+5}{x}\right)=+\infty \end{array}\right\}\Rightarrow \text{No existen asíntotas oblicuas}$$

Función derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-6 & para \quad x\in(-\infty,1)\cup(5,+\infty) \\ -2x+6 & para \quad x\in(1,5) \end{cases}$$

Estudiemos la derivabilidad en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)^{-}=-4 \\ f'(1)^{+}=4 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1)^{-}\neq f'(1)^{+} \Rightarrow \text{función no derivable en } x=1$$

Estudiemos la derivabilidad en $x=5$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(5)^{-}=-4 \\ f'(5)^{+}=4 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(5)^{-}\neq f'(5)^{+} \Rightarrow \text{función no derivable en } x=5$$

Puntos críticos:

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases} 2x-6=0 & \Rightarrow \quad x=3\notin(-\infty,1)\cup(5,+\infty) \\ -2x+6=0 & \Rightarrow \quad x=3\in(1,5) \end{cases}$$

Los puntos críticos son $x=3$ (se anula la derivada) y $x=1,5$ (no existe la derivada).

Crecimiento y decrecimiento:

Estudiemos los puntos críticos:

	$-\infty$ 1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	< 0	> 0	< 0	> 0
$f(x)$	decrece	crece	decrece	crece

$x=1\Rightarrow f(1)=0\Rightarrow(1,0)$ punto anguloso mínimo

$x=3\Rightarrow f(3)=4\Rightarrow(3,4)$ máximo local

$x=5\Rightarrow f(5)=0\Rightarrow(5,0)$ punto anguloso mínimo

Puntos de inflexión:

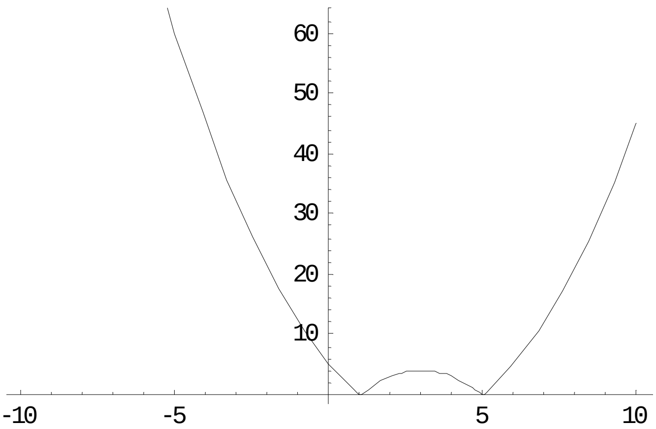
$$f''(x)=\begin{cases} 2 & para \quad x\in(-\infty,1)\cup(5,+\infty) \\ -2 & para \quad x\in(1,5) \end{cases} \Rightarrow f''(x)\neq 0$$

No existen puntos de inflexión.

Concavidad y Convexidad:

	$-\infty$ 1	5	$+\infty$
$f''(x)$	>0	<0	>0
$f(x)$	cóncava hacia arriba	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba

Representación gráfica:



4.5-4 Estudia y representa la función $f(x)=e^{-x/3}\left(x^2-x-2\right)$

Solución

Dominio: $\mathbb{R}$

Continuidad:
La función dada es continua en todo el dominio, es decir $\mathbb{R}$.

Simetrías: No tiene.

Puntos de corte con los ejes:

$$f(x)=e^{-x/3}\left(x^2-x-2\right)=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=2,-1$$

$$x=0 \Rightarrow f(0)=-2$$

Puntos de corte: $(2,0),(-1,0),(0,-2)$

Asíntotas:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x/3}\left(x^2 - x - 2\right) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ Asíntota horizontal}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x/3}\left(x^2 - x - 2\right) = +\infty \Rightarrow \text{No Asíntota horizontal}$$

No existen asíntotas verticales, ya que la función es continua en todo su dominio.

No existen asíntotas oblicuas, ya que:

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x/3}\left(\dfrac{x^2 - x - 2}{x}\right) = -\infty \\ m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x/3}\left(\dfrac{x^2 - x - 2}{x}\right) = 0 \end{array}\right\}$$

Función derivada:

$$f'(x) = -\frac{e^{-x/3}}{3}\left(x^2 - x - 2\right) + e^{-x/3}(2x - 1) = -\frac{e^{-x/3}}{3}\left(x^2 - x - 2 - 6x + 3\right)$$

$$f'(x) = -\frac{e^{-x/3}}{3}\left(x^2 - 7x + 1\right)$$

Puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{e^{-x/3}}{3}\left(x^2 - 7x + 1\right) = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4}}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \approx 6.85 \\ x_2 = \dfrac{7 - 3\sqrt{5}}{2} \approx 0.15 \end{array}\right\} \text{Puntos críticos donde se anula la derivada}$$

Además, la derivada existe para cualquier valor de *x*.

Crecimiento y decrecimiento:

Construimos un cuadro con el signo de $f'(x)$ en los intervalos en que queda dividida la recta real a través de los puntos críticos:

$-\infty$		0.15	6.85	$+\infty$
$f'(x)$	< 0	> 0	< 0	
$f(x)$	decrece	crece	decrece	

Mínimo local en el punto $\frac{7-3\sqrt{5}}{2} \approx 0.15$

Máximo local en el punto $\frac{7+3\sqrt{5}}{2} \approx 6.85$

Puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{e^{-x/3}}{9}\left(x^2-7x+1\right) - \frac{e^{-x/3}}{3}(2x-7) = \frac{e^{-x/3}}{9}\left(x^2-7x+1-6x+21\right)$$

$$f''(x) = \frac{e^{-x/3}}{9}\left(x^2-13x+22\right)$$

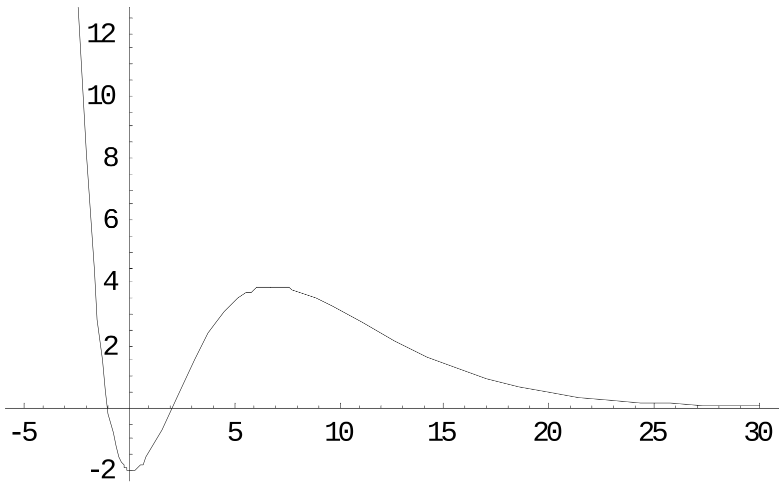
$$f''(x) = 0 \Rightarrow x^2-13x+22=0 \Rightarrow x = \frac{13\pm\sqrt{169-88}}{2} = \frac{13\pm\sqrt{81}}{2} = 11,2$$

Concavidad y Convexidad:

Construimos un cuadro con el signo de $f''(x)$ en los intervalos en que queda dividida la recta real a través de los puntos de inflexión:

	$-\infty$ … 2	2 … 11	11 … $+\infty$
$f''(x)$	> 0	< 0	> 0
$f(x)$	cóncava hacia arriba	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba

Representación gráfica:



4.5-5 Estudia y representa la función $f(x)=\dfrac{x^2-4}{e^{x-1}}$

Solución

Dominio: $\mathbb{R}$

Continuidad:
La función dada es continua en todo el dominio, es decir $\mathbb{R}$.

Simetrías: No tiene.

Puntos de corte con los ejes:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{e^{x-1}}=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x=2,-2$$

$$x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{-4}{e^{-1}}=-4e$$

Puntos de corte: $(2,0),(-2,0),(0,-4e)$

Asíntotas:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{e^{x-1}}=0 \Rightarrow y=0 \text{ Asíntota horizontal}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4}{e^{x-1}}=+\infty \Rightarrow \text{No Asíntota horizontal}$$

No existen asíntotas verticales, ya que la función es continua en todo su dominio.

No existen asíntotas oblicuas, ya que:

$$\left.\begin{array}{l} m=\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-4}{xe^{x-1}}\right)=\infty \\ m=\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-4}{xe^{x-1}}\right)=0 \end{array}\right\}$$

Función derivada:

$$f'(x)=\frac{2xe^{x-1}-\left(x^2-4\right)e^{x-1}}{e^{2(x-1)}}=\frac{\left(2x-x^2+4\right)e^{x-1}}{e^{2(x-1)}}=\frac{2x-x^2+4}{e^{x-1}}$$

Puntos críticos:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2x-x^2+4}{e^{x-1}}=0 \Rightarrow x^2-2x-4=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+16}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{5}}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1=1+\sqrt{5}\approx 3.24 \\ x_2=1-\sqrt{5}\approx -1.24 \end{array}\right\} \text{Puntos críticos donde se anula la derivada}$$

Además, la derivada existe para cualquier valor de *x*.

Crecimiento y decrecimiento:

Construimos un cuadro con el signo de $f'(x)$ en los intervalos en que queda dividida la recta real a través de los puntos críticos:

	$-\infty$ — -1.24	-1.24 — 3.24	3.24 — $+\infty$
$f'(x)$	< 0	> 0	< 0
$f(x)$	decrece	crece	decrece

Mínimo local en el punto $1-\sqrt{5}\approx -1.24$

Máximo local en el punto $1+\sqrt{5}\approx 3.24$

Puntos de inflexión:

$$f''(x)=\frac{(2-2x)e^{x-1}-(2x-x^2+4)e^{x-1}}{e^{2(x-1)}}=\frac{x^2-4x-2}{e^{x-1}}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-4x-2}{e^{x-1}}=0 \Rightarrow x^2-4x-2=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16+8}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{6}}{2}$$

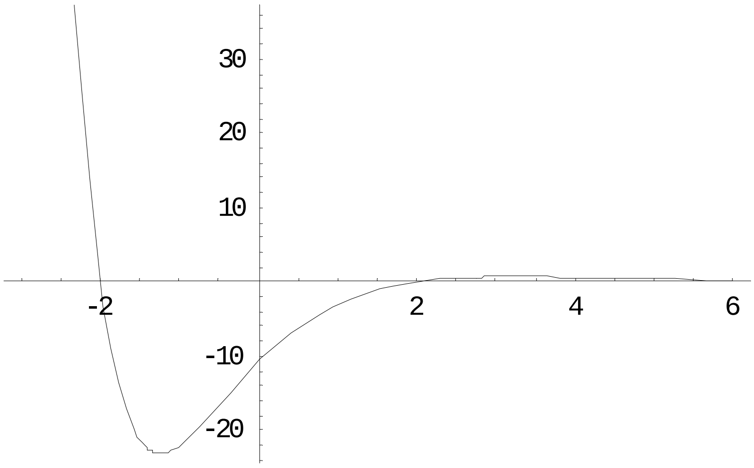
$$x_1=2+\sqrt{6}\approx 4.45$$
$$x_2=2-\sqrt{6}\approx -0.45$$

Concavidad y Convexidad:

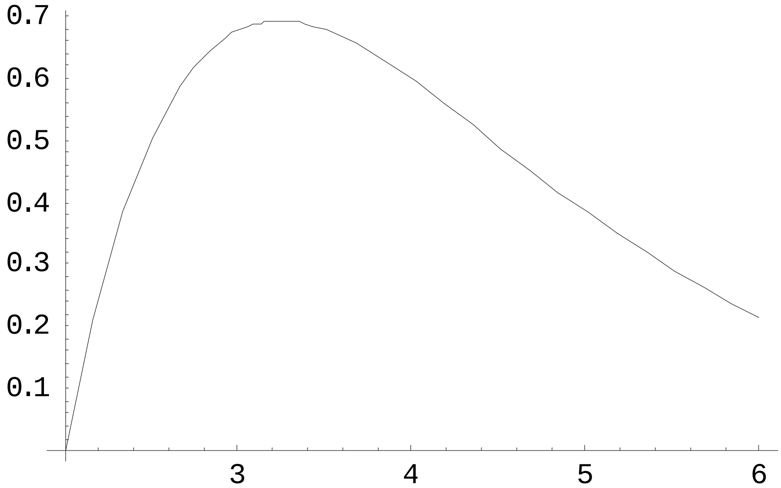
Construimos un cuadro con el signo de $f''(x)$ en los intervalos en que queda dividida la recta real a través de los puntos de inflexión:

	$-\infty$ — -0.45	-0.45 — 4.45	4.45 — $+\infty$
$f''(x)$	> 0	< 0	> 0
$f(x)$	cóncava hacia arriba	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba

Representación gráfica:



Podemos ver la gráfica cerca del punto de inflexión $x_1 = 2 + \sqrt{6} \approx 4.45$:



4.5-6 Estudia y representa la función $f(x)=\frac{1}{|x|-1}-\frac{1}{|x-1|}$

Solución

Dominio: $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

Hemos de tener en cuenta la definición de valor absoluto para ver en que conjunto de funciones se transforma la función dada. Recordemos:

$$|x|=\begin{cases} x & si\ x\geq 0 \\ -x & si\ x\leq 0 \end{cases}$$

Calculamos los puntos en los que se anula cada valor absoluto:

$x=0$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$$(-\infty,0),x\neq -1 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{-x-1}-\frac{1}{1-x}=-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x^2-1}$$

$$(0,1)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x-1}$$

$$(1,+\infty)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-1}=0$$

Es decir:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2}{x^2-1} & para & \left\{\begin{matrix} -\infty<x<-1 \\ -1<x<0 \end{matrix}\right\} \\ \frac{2}{x-1} & para & 0<x<1 \\ 0 & para & 1<x<+\infty \end{cases}$$

Continuidad:

Posible punto de discontinuidad: **x = 0**. Veamos si los límites laterales coinciden:

$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{2}{x^2-1}\right)=-2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{x-1}\right)=-2 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \text{La función es continua en el punto } \mathbf{x=0}$$

Luego, la función es continua en todo su dominio.

Simetrías: No tiene.

Puntos de corte con los ejes:

$$f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x^2-1}=0 & \Rightarrow & \textit{nunca} \\ \dfrac{2}{x-1}=0 & \Rightarrow & \textit{nunca} \\ 0=0 & \Rightarrow & \textit{siempre} \end{cases}$$

$$x \in (1,+\infty) \Rightarrow y=0$$

$$x=0 \Rightarrow f(0)=-2$$

Asíntotas:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{x^2-1}\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Asíntota horizontal } \; y=0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\left(\dfrac{2}{x^2-1}\right)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\dfrac{2}{x^2-1}\right)=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Asíntota vertical } \; x=-1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{2}{x-1}\right)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Asíntota vertical } \; x=1$$

No tiene asíntotas oblicuas ya que tiene dos horizontales.

Función derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2} & \textit{para} & \left\{\begin{array}{l} -\infty<x<-1 \\ -1<x<0 \end{array}\right\} \\ \dfrac{-2}{(x-1)^2} & \textit{para} & 0<x<1 \\ 0 & \textit{para} & 1<x<+\infty \end{cases}$$

Estudiemos la derivabilidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0)^- = 0 \\ f'(0)^+ = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0)^- \neq f'(0)^+ \Rightarrow \text{función no derivable en } x=0$$

Puntos críticos:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}=0 & \Rightarrow \quad x=0 \notin \begin{cases} -\infty < x < -1 \\ -1 < x < 0 \end{cases} \\ \dfrac{-2}{\left(x-1\right)^2}=0 & \Rightarrow \quad \textbf{\textit{nunca}} \\ 0 & \Rightarrow \quad \textbf{\textit{siempre}} \end{cases}$$

Crecimiento y decrecimiento:

$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	> 0	> 0	< 0	= 0
$f(x)$	crece	crece	decrece	recta

Punto anguloso máximo en $x=0$

Puntos de inflexión:

$$f''(x)= \begin{cases} \dfrac{12x^2+4}{\left(x^2-1\right)^3} & \textbf{\textit{para}} \quad \begin{cases} -\infty < x < -1 \\ -1 < x < 0 \end{cases} \\ \dfrac{4}{\left(x-1\right)^3} & \textbf{\textit{para}} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \textbf{\textit{para}} \quad 1 < x < +\infty \end{cases}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{12x^2+4}{\left(x^2-1\right)^3}=0 & \Rightarrow \quad 12x^2+4 \neq 0 \\ \dfrac{4}{\left(x-1\right)^3}=0 & \Rightarrow \quad 4 \neq 0 \\ 0=0 & \Rightarrow \quad \textbf{\textit{siempre}} \end{cases}$$

No tiene puntos de inflexión distintos de $x \in (1,+\infty)$

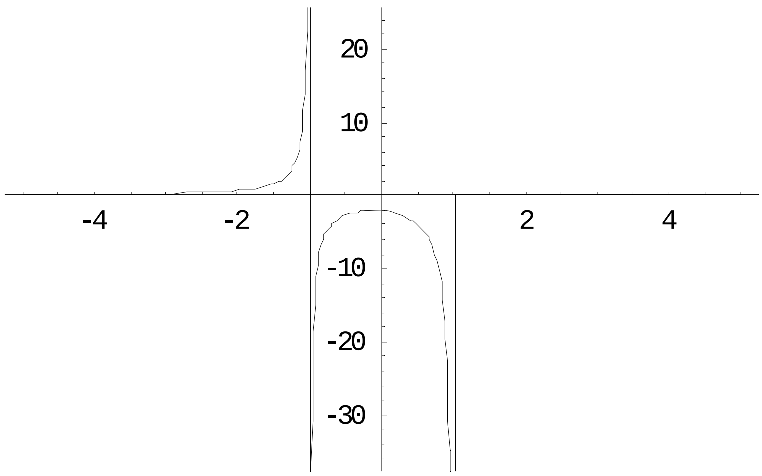
Concavidad y Convexidad:

$-\infty$ $\quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad$ $+\infty$

$f''(x)$	> 0	< 0	< 0	= 0
$f(x)$	cóncava hacia arriba	cóncava hacia abajo	cóncava hacia abajo	recta

Hay cambios en la concavidad en $x=-1$.

Representación gráfica:



Podemos visualizar lo que ocurre en el punto anguloso $x=0$