

Bloque I. Función real de variable real  
**Tema 2 Límites y Continuidad**

## Ejercicios resueltos

I.2-1 Resolver los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}; & b) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25}; & c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}; \\ d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}; & e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}; & f) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \end{array}$$

### Solución

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$  indeterminación de la forma  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ . Para evitarla, descomponemos en factores numerador y denominador, simplificamos y por último sustituimos  $x$  por  $-1$ :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = -\frac{3}{2}$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25}$  indeterminación de la forma  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ . Para evitarla, descomponemos en factores numerador y denominador, simplificamos y por último sustituimos  $x$  por  $5$ :

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{(x+5)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{10}$$

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$  indeterminación de la forma  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ . Para evitarla, racionalizamos, simplificamos y por último sustituimos  $x$  por  $3$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$  indeterminación de la forma  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ . Para evitarla, racionalizamos, simplificamos y por último sustituimos  $x$  por 0:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2-2}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

- e)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$  indeterminación de la forma  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ . Para evitarla, descomponemos en factores numerador y denominador, simplificamos y por último sustituimos  $x$  por 2:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(x-2)} = \pm\infty$$

- f)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$  indeterminación de la forma  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ . Para evitarla, realizamos las operaciones que se nos indica en el numerador, simplificamos y por último sustituimos  $h$  por 0:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 \end{aligned}$$

I.2-2 Resolver:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x + \sqrt[3]{x}}$

### Solución

Indeterminación de la forma  $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ . Para evitarla, dividimos numerador y denominador por  $x$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x + \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x+3}{x}}{\frac{x + \sqrt[3]{x}}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{\sqrt[3]{x}}{x}} = 2$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = 0 \end{aligned} \right\}$$

I.2-3 Resolver:  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$

### Solución

Indeterminación de la forma  $\{\infty - \infty\}$ . Para evitarla, en primer lugar racionalizamos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{(\sqrt{x^2+1} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x^2+1-x^2)}{(\sqrt{x^2+1} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2+1} + x)} \end{aligned}$$

En la última expresión dividimos numerador y denominador por  $x$  con lo cual obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\left(\frac{\sqrt{x^2+1} + x}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}$$

I.2-4 Resolver:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$

### Solución

Indeterminación de la forma  $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ . Para evitarla, dividimos numerador y denominador por  $\sqrt{x}$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}}} = 1$$

I.2-5 Sabemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Resolver:

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ;    b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5}$ ;    c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$ ;    e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$

### Solución

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  Indeterminación de la forma  $\{1^\infty\}$

Tenemos que escribirlo de la forma del número  $e$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Hacemos un cambio de variable:  $T = -(x+1) \Rightarrow x = -T-1$   
 Si  $x \rightarrow -\infty \Rightarrow T \rightarrow \infty$

Con este cambio:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-T-1}\right)^{-T-1} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{T+1}\right)^{-T-1} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{T+1-1}{T+1}\right)^{-T-1} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{T}{T+1}\right)^{-(T+1)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{T+1}{T}\right)^{(T+1)} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{T}\right)^{(T+1)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{T}\right)^T \left(1 + \frac{1}{T}\right) = e \cdot 1 = e \end{aligned}$$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5}$  Indeterminación de la forma  $\{1^\infty\}$

Tenemos que escribirlo de la forma del número  $e$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 = e \cdot 1 = e$$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$  Indeterminación de la forma  $\{1^\infty\}$

Tenemos que escribirlo de la forma del número  $e$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^3 = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^3 = e^3$$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$  Indeterminación de la forma  $\{1^\infty\}$

Tenemos que escribirlo de la forma del número  $e$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^x \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} = T \Rightarrow x = 2T \\ x \rightarrow \infty \Rightarrow T \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{T}\right)^{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{T}\right)^T\right]^2 = e^2 \end{aligned}$$

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$  Indeterminación de la forma  $\{1^\infty\}$

Tenemos que escribirlo de la forma del número  $e$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{(x-1)+4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{4}}\right)^{(x-1)+4} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-1}{4} = T \Rightarrow x-1 = 4T \\ x \rightarrow \infty \Rightarrow T \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{T}\right)^{4T+4} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{T}\right)^{4T} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{T}\right)^4 = e^4 \cdot 1 = e^4 \end{aligned}$$

I.2-6 Resolver:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} + \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}} \right)$

**Solución**

Indeterminación de la forma  $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ . Sabemos que el límite de una suma es la suma de los límites, por lo tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} + \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}} = 1 + 1 = 2$$

También lo podríamos resolver racionalizando.

I.2-7 Resolver:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^4 + 2n^3} - (n^2 + n) \right)$

**Solución**

Indeterminación de la forma  $\{\infty - \infty\}$ . Racionalizamos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^4 + 2n^3} - (n^2 + n) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( \sqrt{n^4 + 2n^3} - (n^2 + n) \right) \left( \sqrt{n^4 + 2n^3} + (n^2 + n) \right)}{\left( \sqrt{n^4 + 2n^3} + (n^2 + n) \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^3 - (n^2 + n)^2}{\left( \sqrt{n^4 + 2n^3} + (n^2 + n) \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^3 - n^4 - 2n^3 - n^2}{\left( \sqrt{n^4 + 2n^3} + (n^2 + n) \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{\sqrt{n^4 + 2n^3} + (n^2 + n)} \end{aligned}$$

Dividiendo numerador y denominador por  $n^2$  obtenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1 + \frac{1}{n}} = -\frac{1}{2}$$

I.2-8 Resolver:  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$

### Solución

Indeterminación de la forma  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ . Racionalizamos, descomponemos en factores, simplificamos y finalmente sustituimos  $x$  por 7:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49} &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(2 - \sqrt{x-3})(2 + \sqrt{x-3})}{(x^2 - 49)(2 + \sqrt{x-3})} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{4 - (x-3)}{(x^2 - 49)(2 + \sqrt{x-3})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{7 - x}{(x-7)(x+7)(2 + \sqrt{x-3})} = - \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{(x-7)(x+7)(2 + \sqrt{x-3})} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{(x+7)(2 + \sqrt{x-3})} = - \frac{1}{14 \cdot 4} = - \frac{1}{56} \end{aligned}$$


---

I.2-9 Resolver:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

### Solución

Indeterminación de la forma  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ . Racionalizamos, simplificamos y sustituimos  $x$  por cero:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = 1 \end{aligned}$$


---

I.2-10 Resolver:  $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$

### Solución

Indeterminación de la forma  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ .

Vamos a realizar un cambio de variable. Como el mínimo común de los índices de las raíces es 6:

$$y = \sqrt[6]{x}$$

Si  $x \rightarrow 64 \Rightarrow y \rightarrow \sqrt[6]{64} = 2$  con lo cual:

$$\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^3 - 8}{y^2 - 4}$$

Descomponemos en factores, simplificamos y sustituimos  $y$  por 2:

$$\lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^3 - 8}{y^2 - 4} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{(y-2)(y^2 + 2y + 4)}{(y-2)(y+2)} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{(y^2 + 2y + 4)}{y+2} = 3$$

---