Ejercicios resueltos

I.5-1 Estudia y representa la función $f(x)=\dfrac{\left|x^2-3x+2\right|+\left|x^2-1\right|}{|x|}$

Solución

Hemos de tener en cuenta la definici ón de valor absoluto para ver en que conjunto de funciones se transforma la función dada. Recordemos:

$$|x|=\begin{cases} x & \boldsymbol{si} \;\; x\geq 0 \\ -x & \boldsymbol{si} \;\; x\leq 0 \end{cases}$$

Calculamos los puntos en los que se anula cada valor absoluto:

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}\Rightarrow\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=1 \end{cases}$$

$$x^2-1=0\Rightarrow\begin{cases} x_1= \;\; 1 \\ x_2=-1 \end{cases}$$

$$(-\infty,-1)\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x^2-3x+2>0 \\ x^2-1>0 \\ x<0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow f(x)=\frac{\left(x^2-3x+2\right)+\left(x^2-1\right)}{-x}=\frac{2x^2-3x+1}{-x}$$

$$(-1,0)\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x^2-3x+2>0 \\ x^2-1<0 \\ x<0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow f(x)=\frac{\left(x^2-3x+2\right)-\left(x^2-1\right)}{-x}=\frac{-3x+3}{-x}$$

$$(0,1)\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x^2-3x+2>0 \\ x^2-1<0 \\ x>0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow f(x)=\frac{\left(x^2-3x+2\right)-\left(x^2-1\right)}{x}=\frac{-3x+3}{x}$$

$$(1,2)\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x^2-3x+2<0 \\ x^2-1>0 \\ x>0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow f(x)=\frac{-\left(x^2-3x+2\right)+\left(x^2-1\right)}{x}=\frac{3x-3}{x}$$

Ana Isabel Allueva Pinilla –José Luis Alejandre Marco MATEMÁTICA APLICADA - Universidad de Zaragoza

$$(2,+\infty)\Rightarrow\begin{cases}x^2-3x+2>0\\ x^2-1>0\\ x>0\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{\left(x^2-3x+2\right)+\left(x^2-1\right)}{x}=\frac{2x^2-3x+1}{x}$$

Es decir:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-3x+1}{-x} & para \quad -\infty<x<-1\\[2mm] \dfrac{-3x+3}{-x} & para \quad -1<x<0\\[2mm] \dfrac{-3x+3}{x} & para \quad 0<x<1\\[2mm] \dfrac{3x-3}{x} & para \quad 1<x<2\\[2mm] \dfrac{2x^2-3x+1}{x} & para \quad 2<x<+\infty\end{cases}$$

Dominio: $\mathbb{R}-\{0\}$

Continuidad:
La función es **discontinua** en el punto **x = 0**
Posibles puntos de dis continuidad: **x = –1, 1, 2**. Veamos si los límites laterales coinciden:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1^-}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{-x}\right)=6\\ \lim\limits_{x\to-1^+}\left(\dfrac{-3x+3}{-x}\right)=6\end{array}\right\}\Rightarrow \text{La función es continua en el punto } \mathbf{x=-1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{-3x+3}{x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{3x-3}{x}\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{La función es continua en el punto } \mathbf{x=1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{3x-3}{x}\right)=\dfrac{3}{2}\\ \lim\limits_{x\to2^+}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{x}\right)=\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{La función es continua en el punto } \mathbf{x=2}$$

La función dada es continua en todo el dominio, es decir $\mathbb{R}-\{0\}$.

Simetrías: No tiene.

Puntos de corte con los ejes:

$$f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x^2-3x+1}{-x}=0 & \Rightarrow & \begin{cases} x_1=1\notin(-\infty,-1) \\ x_2=0.5\notin(-\infty,-1) \end{cases} \\ \dfrac{-3x+3}{-x}=0 & \Rightarrow & x=1\notin(-1,0) \\ \dfrac{-3x+3}{x}=0 & \Rightarrow & x=1\notin(0,1) \\ \dfrac{3x-3}{x}=0 & \Rightarrow & x=1\notin(1,2) \\ \dfrac{2x^2-3x+1}{x}=0 & \Rightarrow & \begin{cases} x_1=1\notin(2,+\infty) \\ x_2=0.5\notin(2,+\infty) \end{cases} \end{cases}$$

$x=-1 \Rightarrow y=6$

$x=1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (1,0)$ punto de corte

$x=2 \Rightarrow y=\dfrac{3}{2}$

Asíntotas:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{-x}\right)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{x}\right)=+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{No existen asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{-3x+3}{-x}\right)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{-3x+3}{x}\right)=+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Asíntotas verticales: } x=0$$

$$\left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{-x^2}\right)=-2 \\ n=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{-x}+2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-3x+1}{-x}\right)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Asíntota oblicua: $y=-2x+3$

$$\left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2}\right)=2 \\ n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-3x+1}{x}-2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-3x+1}{x}\right)=-3 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

Asíntota oblicua: $y=2x-3$

Función derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-2x^2+1}{x^2} & para \quad -\infty<x<-1 \\ \dfrac{3}{x^2} & para \quad -1<x<0 \\ -\dfrac{3}{x^2} & para \quad 0<x<1 \\ \dfrac{3}{x^2} & para \quad 1<x<2 \\ \dfrac{2x^2-1}{x^2} & para \quad 2<x<+\infty \end{cases}$$

Estudiemos la derivabilidad en $x=-1$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1)^-=-1 \\ f'(-1)^+=3 \end{array}\right\}\Rightarrow f'(-1)^-\neq f'(-1)^+\Rightarrow \text{función no derivable en } x=-1$$

Estudiemos la derivabilidad en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)^-=-3 \\ f'(1)^+=3 \end{array}\right\}\Rightarrow f'(1)^-\neq f'(1)^+\Rightarrow \text{función no derivable en } x=1$$

Estudiemos la derivabilidad en $x=2$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2)^-=\dfrac{3}{4} \\ f'(2)^+=\dfrac{7}{4} \end{array}\right\}\Rightarrow f'(2)^-\neq f'(2)^+\Rightarrow \text{función no derivable en } x=2$$

Puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=0\Rightarrow -2x^2+1=0\Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\notin(-\infty,-1) \\ f'(x)=0\Rightarrow 2x^2-1=0\Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\notin(2,+\infty) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

Esto indica que no tiene máximos ni mínimos. Los únicos puntos críticos son aquellos en que no existe la derivada, $x=-1,1,2$.

Crecimiento y decrecimiento:

Estudiemos los puntos en que no está definida la función derivada.

$$f(-1)=6 \Rightarrow \begin{cases} f'(-1-\varepsilon)=\dfrac{-2(-1-\varepsilon)^2+1}{(-1-\varepsilon)^2}<0 \Rightarrow f(x) \ \ \textit{decreciente} \\ f'(-1+\varepsilon)=\dfrac{3}{(-1+\varepsilon)^2}>0 \Rightarrow f(x) \ \ \textit{creciente} \end{cases}$$

La función es decreciente a la izqu ierda y creciente a la derecha del punto $x=-1$. La función presenta un punto anguloso mínimo en $x=-1$

$$f(1)=0 \Rightarrow \begin{cases} f'(1-\varepsilon)=-\dfrac{3}{(1-\varepsilon)^2}<0 \Rightarrow f(x) \ \ \textit{decreciente} \\ f'(1+\varepsilon)=\dfrac{3}{(1+\varepsilon)^2}>0 \Rightarrow f(x) \ \ \textit{creciente} \end{cases}$$

La función es decreciente a la izqu ierda y creciente a la derecha del punto $x=1$. La función presenta un punto anguloso mínimo en $x=1$

$$f(2)=\frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} f'(2-\varepsilon)=\dfrac{3}{(2-\varepsilon)^2}>0 \Rightarrow f(x) \ \ \textit{creciente} \\ f'(2+\varepsilon)=\dfrac{2\cdot(2+\varepsilon)^2-1}{(2+\varepsilon)^2}>0 \Rightarrow f(x) \ \ \textit{creciente} \end{cases}$$

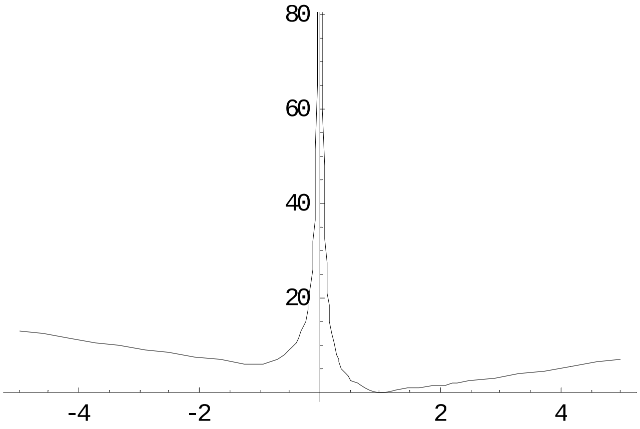
La función es creciente a la izquierda y a la derecha del punto $x=2$. La función no presenta ni máximo ni mínimo en el punto anguloso $x=2$

Concavidad y Convexidad:

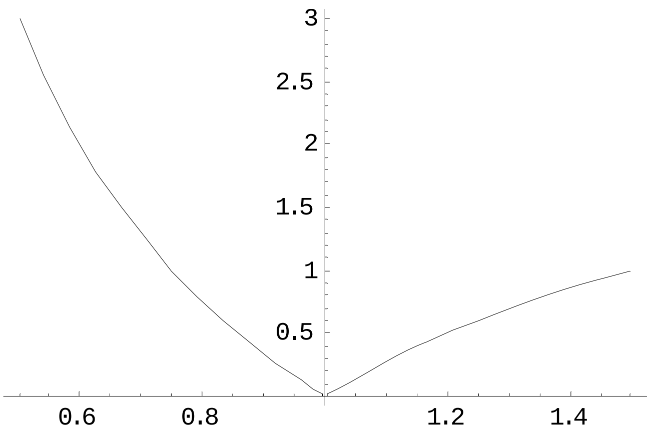
$$f''(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{x^3} & \textit{para} \quad -\infty<x<-1 \\ -\dfrac{6}{x^3} & \textit{para} \quad -1<x<0 \\ \dfrac{6}{x^3} & \textit{para} \quad 0<x<1 \\ -\dfrac{6}{x^3} & \textit{para} \quad 1<x<2 \\ \dfrac{2}{x^3} & \textit{para} \quad 2<x<+\infty \end{cases} \Rightarrow f''(x)=\begin{cases} >0 & \textit{para} \quad -\infty<x<-1 \\ >0 & \textit{para} \quad -1<x<0 \\ >0 & \textit{para} \quad 0<x<1 \\ <0 & \textit{para} \quad 1<x<2 \\ >0 & \textit{para} \quad 2<x<+\infty \end{cases}$$

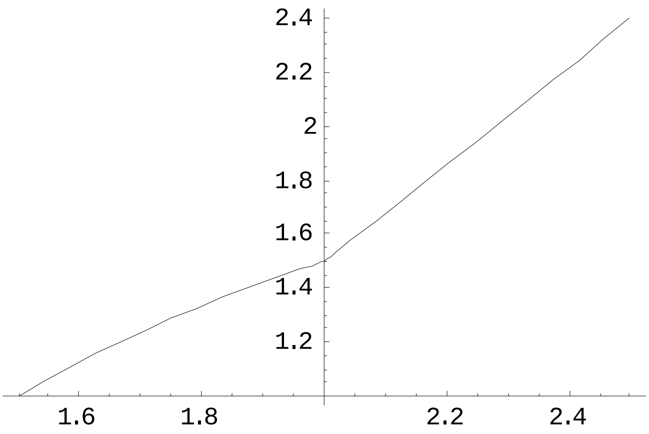
Hay cambios en la concavidad en $x=1$ y en $x=2$ que son los puntos de inflexión de la función.

Representación gráfica:



Podemos visualizar lo que ocurre en los puntos $x=1$ y $x=2$





I.5-2 Estudia y representa la función $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-2)\cdot(x-6)}$

Solución

Dominio: $\mathbb{R}-\{2,6\}$

Continuidad:
La función es **discontinua** en los puntos **x = 2, 6**
La función dada es continua en todo el dominio, es decir $\mathbb{R}-\{2,6\}$.

Simetrías: No tiene.

Puntos de corte con los ejes:

$$f(x)=\frac{x^2}{(x-2)\cdot(x-6)}=0\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0\Rightarrow(0,0)$$

Asíntotas:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-2)\cdot(x-6)}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-2)\cdot(x-6)}\right)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y=1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{x^2}{(x-2)\cdot(x-6)}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left(\dfrac{x^2}{(x-2)\cdot(x-6)}\right)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Asíntota vertical: } x=2$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to6^-} f(x)=\lim\limits_{x\to6^-}\left(\dfrac{x^2}{(x-2)\cdot(x-6)}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to6^+} f(x)=\lim\limits_{x\to6^+}\left(\dfrac{x^2}{(x-2)\cdot(x-6)}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Asíntota vertical: } x=6$$

$$\left.\begin{array}{l}m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{(x-2)\cdot(x-6)}\right)=0\\ m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{(x-2)\cdot(x-6)}\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas}$$

Función derivada:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x-2)\cdot(x-6)-(2x-8)\cdot x^2}{(x-2)^2\cdot(x-6)^2}=\frac{8x\cdot(3-x)}{(x-2)^2\cdot(x-6)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(24-16x)\cdot(x-2)^2\cdot(x-6)^2}{(x-2)^4\cdot(x-6)^4}+$$
$$+\frac{-8x\cdot(3-x)\cdot\left[2\cdot(x-2)\cdot(x-6)^2+2\cdot(x-2)^2\cdot(x-6)\right]}{(x-2)^4\cdot(x-6)^4}$$

$$f''(x)=\frac{8\cdot(x-2)\cdot(x-6)\cdot\left[(3-2x)\cdot(x-2)\cdot(x-6)-x\cdot(3-x)\cdot(4x-16)\right]}{(x-2)^4\cdot(x-6)^4}$$

$$f''(x)=\frac{8\cdot\left(2x^3-9x^2+36\right)}{(x-2)^3\cdot(x-6)^3}$$

Puntos críticos:

$$f'(x)=0\Rightarrow 8x\cdot(3-x)=0\Rightarrow x=0,3$$

$$f''(0)=\frac{8\cdot 36}{(-2)^3\cdot(-6)^3}>0\Rightarrow \text{ en } x=0 \text{ hay un mínimo relativo}$$

$$f''(3)=\frac{8\cdot 9}{1^3\cdot(-3)^3}<0\Rightarrow \text{ en } x=3 \text{ hay un máximo relativo}$$

Crecimiento y decrecimiento:

Construimos un cuadr o con el si gno de $f'(x)$ en los intervalos en que queda dividida la recta real a través de los puntos críti cos $x=0,3$ y los puntos donde no existe la primera derivada $x=2,6$:

	$-\infty$ 0	0 2	2 3	3 6	6 $+\infty$
$f'(x)$	< 0	> 0	> 0	< 0	< 0
$f(x)$	decrece	crece	crece	decrece	decrece

Puntos de inflexión:

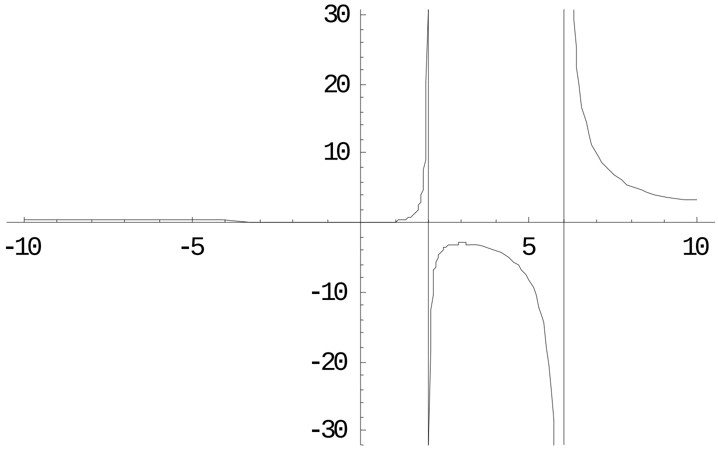
$$f''(x)=0\Rightarrow 2x^3-9x^2+36=0\Rightarrow x=-1.70342\approx-1.7 \text{ es la única raíz real}$$

Concavidad y Convexidad:

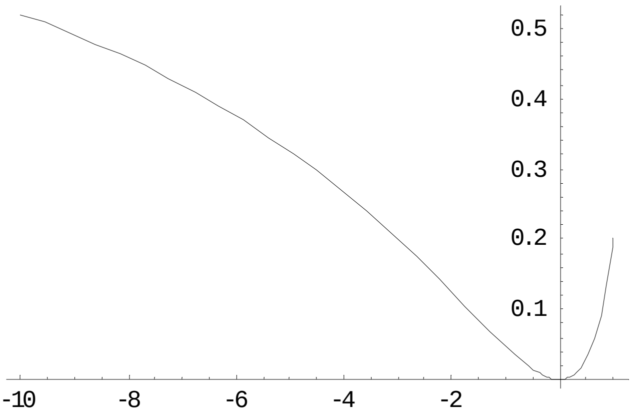
Construimos un cuadr o con el si gno de $f''(x)$ en los interva los en que queda dividida la recta real a través del punto de inflexión $x = -1.7$ y los puntos donde no existe la segunda derivada $x = 2{,}6$:

$-\infty$	-1.7	2	6	$+\infty$
$f''(x)$	< 0	> 0	< 0	> 0
$f(x)$	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba

Representación gráfica:



Podemos visualizar lo que ocurre en el punto $x = -1.7$



I.5-3 Estudia y representa la función $f(x)=\left|x^2-6x+5\right|$

Solución

Hemos de tener en cuenta la definici ón de valor a bsoluto para ver en que conjunto de funciones se transforma la función dada. Recordemos:

$$|x|=\begin{cases} x & \textit{si } x\geq 0 \\ -x & \textit{si } x\leq 0 \end{cases}$$

Calculamos los puntos en los que se anula este valor absoluto:

$$x^2-6x+5=0 \Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\frac{6\pm 4}{2}\Rightarrow \begin{cases} x_1=5 \\ x_2=1 \end{cases}$$

$$(-\infty,1)\Rightarrow x^2-6x+5>0\Rightarrow f(x)=x^2-6x+5$$
$$(1,5)\Rightarrow x^2-6x+5<0\Rightarrow f(x)=-x^2+6x-5$$
$$(5,+\infty)\Rightarrow x^2-6x+5>0\Rightarrow f(x)=x^2-6x+5$$

Dominio: $\mathbb{R}$

Continuidad:
La función es **continua** en todo el dominio, es decir $\mathbb{R}$.

Simetrías: No tiene.

Puntos de corte con los ejes:

$$\left.\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=5 \\ y=0\Rightarrow x=1,5 \end{array}\right\}\Rightarrow (0,5),(1,0),(5,0)$$

Asíntotas:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-6x+5\right)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-6x+5\right)=+\infty \end{array}\right\}\Rightarrow \text{No existen asíntotas horizontales.}$$

No existen asíntotas verticales, ya que la función es continua en t odo su dominio.

$$\left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-6x+5}{x}\right)=-\infty \\ m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-6x+5}{x}\right)=+\infty \end{array}\right\}\Rightarrow \text{No existen asíntotas oblicuas.}$$

Función derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-6 & para \quad x\in(-\infty,1)\cup(5,+\infty) \\ -2x+6 & para \quad x\in(1,5) \end{cases}$$

Estudiemos la derivabilidad en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)^{-}=-4 \\ f'(1)^{+}=4 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1)^{-}\neq f'(1)^{+} \Rightarrow \text{función no derivable en } x=1$$

Estudiemos la derivabilidad en $x=5$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(5)^{-}=-4 \\ f'(5)^{+}=4 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(5)^{-}\neq f'(5)^{+} \Rightarrow \text{función no derivable en } x=5$$

Puntos críticos:

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases} 2x-6=0 & \Rightarrow \quad x=3\notin(-\infty,1)\cup(5,+\infty) \\ -2x+6=0 & \Rightarrow \quad x=3\in(1,5) \end{cases}$$

Los puntos críticos son $x=3$ (se anula la derivada) y $x=1,5$ (no existe la derivada).

Crecimiento y decrecimiento:

Estudiemos los puntos críticos:

$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	<0	>0	<0	>0
$f(x)$	decrece	crece	decrece	crece

$x=1\Rightarrow f(1)=0\Rightarrow(1,0)$ punto anguloso mínimo

$x=3\Rightarrow f(3)=4\Rightarrow(3,4)$ máximo local

$x=5\Rightarrow f(5)=0\Rightarrow(5,0)$ punto anguloso mínimo

Puntos de inflexión:

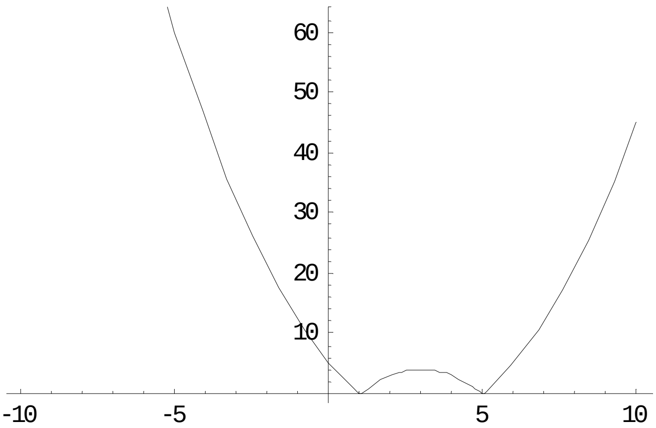
$$f''(x)=\begin{cases} 2 & para \quad x\in(-\infty,1)\cup(5,+\infty) \\ -2 & para \quad x\in(1,5) \end{cases} \Rightarrow f''(x)\neq 0$$

No existen puntos de inflexión.

Concavidad y Convexidad:

	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$f''(x)$	>0	<0	>0	
$f(x)$	cóncava hacia arriba	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba	

Representación gráfica:



I.5-4 Estudia y representa la función $f(x)=e^{-x/3}\left(x^2-x-2\right)$

Solución

Dominio: $\mathbb{R}$

Continuidad:
La función dada es continua en todo el dominio, es decir $\mathbb{R}$.

Simetrías: No tiene.

Puntos de corte con los ejes:

$$f(x)=e^{-x/3}\left(x^2-x-2\right)=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=2,-1$$

$$x=0 \Rightarrow f(0)=-2$$

Puntos de corte: $(2,0),(-1,0),(0,-2)$

Asíntotas:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x/3}\left(x^2-x-2\right) = 0 \Rightarrow y=0 \quad \text{Asíntota horizontal}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x/3}\left(x^2-x-2\right) = +\infty \Rightarrow \text{No Asíntota horizontal}$$

No existen asíntotas verticales, ya que la función es continua en todo su dominio.

No existen asíntotas oblicuas, ya que:

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x/3}\left(\dfrac{x^2-x-2}{x}\right) = -\infty \\ m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x/3}\left(\dfrac{x^2-x-2}{x}\right) = 0 \end{array}\right\}$$

Función derivada:

$$f'(x) = -\frac{e^{-x/3}}{3}\left(x^2-x-2\right) + e^{-x/3}(2x-1) = -\frac{e^{-x/3}}{3}\left(x^2-x-2-6x+3\right)$$

$$f'(x) = -\frac{e^{-x/3}}{3}\left(x^2-7x+1\right)$$

Puntos críticos:

$$f'(x)=0 \Rightarrow -\frac{e^{-x/3}}{3}\left(x^2-7x+1\right)=0 \Rightarrow x^2-7x+1=0 \Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-4}}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2} \approx 6.85 \\ x_2 = \dfrac{7-3\sqrt{5}}{2} \approx 0.15 \end{array}\right\} \text{Puntos críticos donde se anula la derivada}$$

Además, la derivada existe para cualquier valor de *x*.

Crecimiento y decrecimiento:

Construimos un cuadro con el signo de $f'(x)$ en los intervalos en que queda dividida la recta real a través de los puntos críticos:

	$-\infty$ — 0.15	0.15 — 6.85	6.85 — $+\infty$
$f'(x)$	< 0	> 0	< 0
$f(x)$	decrece	crece	decrece

Mínimo local en el punto $\frac{7-3\sqrt{5}}{2} \approx 0.15$

Máximo local en el punto $\frac{7+3\sqrt{5}}{2} \approx 6.85$

Puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{e^{-x/3}}{9}\left(x^2-7x+1\right) - \frac{e^{-x/3}}{3}(2x-7) = \frac{e^{-x/3}}{9}\left(x^2-7x+1-6x+21\right)$$

$$f''(x) = \frac{e^{-x/3}}{9}\left(x^2-13x+22\right)$$

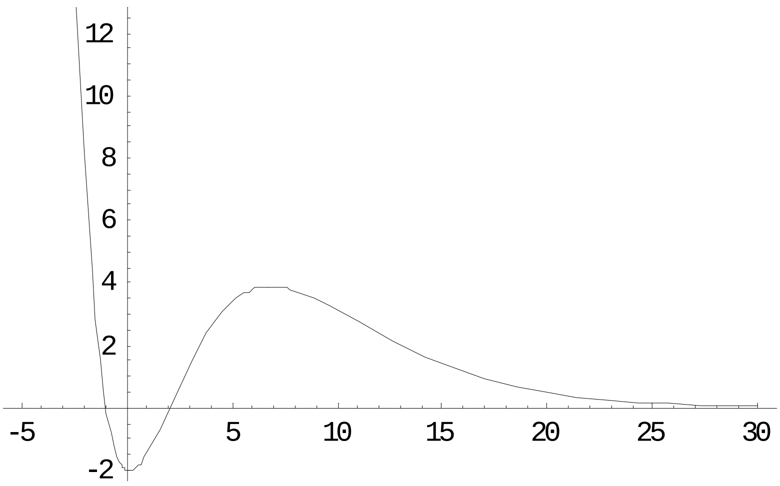
$$f''(x) = 0 \Rightarrow x^2-13x+22=0 \Rightarrow x = \frac{13\pm\sqrt{169-88}}{2} = \frac{13\pm\sqrt{81}}{2} = 11,2$$

Concavidad y Convexidad:

Construimos un cuadr o con el si gno de $f''(x)$ en los interva los en que queda dividida la recta real a través de los puntos de inflexión:

	$-\infty$ 2	2 11	11 $+\infty$
$f''(x)$	> 0	< 0	> 0
$f(x)$	cóncava hacia arriba	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba

Representación gráfica:



I.5-5 Estudia y representa la función $f(x)=\dfrac{x^2-4}{e^{x-1}}$

Solución

Dominio: $\mathbb{R}$

Continuidad:
La función dada es continua en todo el dominio, es decir $\mathbb{R}$.

Simetrías: No tiene.

Puntos de corte con los ejes:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{e^{x-1}}=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x=2,-2$$

$$x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{-4}{e^{-1}}=-4e$$

Puntos de corte: $(2,0),(-2,0),(0,-4e)$

Asíntotas:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{e^{x-1}}=0 \Rightarrow y=0 \quad \text{Asíntota Horizontal}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4}{e^{x-1}}=+\infty \Rightarrow \text{No Asíntota horizontal}$$

No existen asíntotas verticales, ya que la función es continua en todo su dominio.

No existen asíntotas oblicuas, ya que:

$$\left.\begin{array}{l} m=\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-4}{xe^{x-1}}\right)=\infty \\ m=\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-4}{xe^{x-1}}\right)=0 \end{array}\right\}$$

Función derivada:

$$f'(x)=\frac{2xe^{x-1}-\left(x^2-4\right)e^{x-1}}{e^{2(x-1)}}=\frac{\left(2x-x^2+4\right)e^{x-1}}{e^{2(x-1)}}=\frac{2x-x^2+4}{e^{x-1}}$$

Puntos críticos:

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2x-x^2+4}{e^{x-1}}=0\Rightarrow x^2-2x-4=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+16}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{5}}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}x_1=1+\sqrt{5}\approx3.24\\ x_2=1-\sqrt{5}\approx-1.24\end{array}\right\}\text{ Puntos críticos donde se anula la derivada}$$

Además, la derivada existe para cualquier valor de *x*.

Crecimiento y decrecimiento:

Construimos un cuadro con el signo de $f'(x)$ en los intervalos en que queda dividida la recta real a través de los puntos críticos:

$-\infty$		-1.24	3.24	$+\infty$
$f'(x)$	<0	>0	<0
$f(x)$	decrece	crece	decrece

Mínimo local en el punto $1-\sqrt{5}\approx-1.24$

Máximo local en el punto $1+\sqrt{5}\approx3.24$

Puntos de inflexión:

$$f''(x)=\frac{(2-2x)e^{x-1}-(2x-x^2+4)e^{x-1}}{e^{2(x-1)}}=\frac{x^2-4x-2}{e^{x-1}}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow\frac{x^2-4x-2}{e^{x-1}}=0\Rightarrow x^2-4x-2=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16+8}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{6}}{2}$$

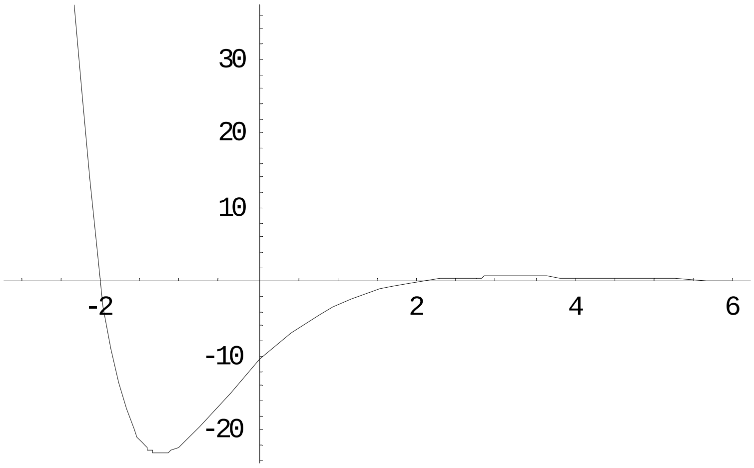
$$x_1=2+\sqrt{6}\approx4.45$$
$$x_2=2-\sqrt{6}\approx-0.45$$

Concavidad y Convexidad:

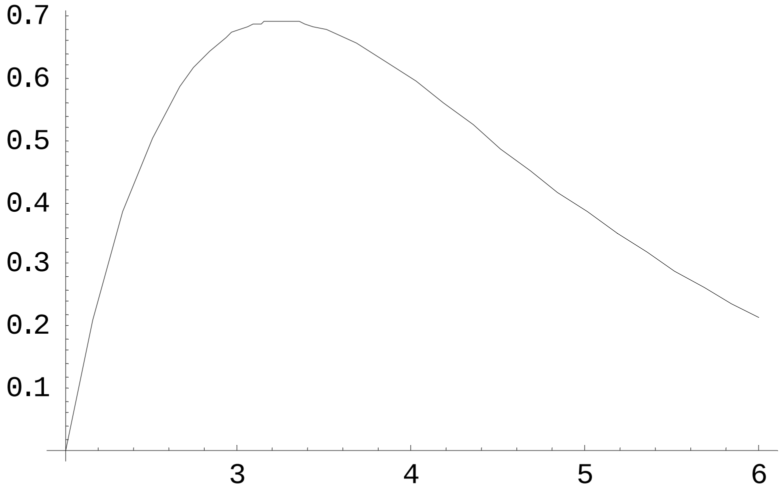
Construimos un cuadro con el signo de $f''(x)$ en los intervalos en que queda dividida la recta real a través de los puntos de inflexión:

	$-\infty$	-0.45	4.45	$+\infty$
$f''(x)$	>0	<0	>0
$f(x)$	cóncava hacia arriba	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba

Representación gráfica:



Podemos ver la gráfica cerca del punto de inflexión $x_1 = 2 + \sqrt{6} \approx 4.45$:



I.5-6 Estudia y representa la función $f(x)=\frac{1}{|x|-1}-\frac{1}{|x-1|}$

Solución

Dominio: $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

Hemos de tener en cuenta la definici ón de valor a bsoluto para ver en que conjunto de funciones se transforma la función dada. Recordemos:

$$|x|=\begin{cases} x & si\ \ x\geq 0 \\ -x & si\ \ x\leq 0 \end{cases}$$

Calculamos los puntos en los que se anula cada valor absoluto:

$x=0$

$x-1=0\Rightarrow x=1$

$$(-\infty,0),x\neq -1\Rightarrow f(x)=\frac{1}{-x-1}-\frac{1}{1-x}=-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x^2-1}$$

$$(0,1)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x-1}$$

$$(1,+\infty)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-1}=0$$

Es decir:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^2-1} & para & \left\{\begin{matrix} -\infty<x<-1 \\ -1<x<0 \end{matrix}\right\} \\ \dfrac{2}{x-1} & para & 0<x<1 \\ 0 & para & 1<x<+\infty \end{cases}$$

Continuidad:

Posible punto de disc ontinuidad: **x = 0**. Veamos si los límites laterales coinciden:

$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2}{x^2-1}\right)=-2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2}{x-1}\right)=-2 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \text{La función es continua en el punto } \mathbf{x=0}$$

Luego, la función es continua en todo su dominio.

Simetrías: No tiene.

Puntos de corte con los ejes:

$$f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x^2-1}=0 & \Rightarrow \quad \textit{nunca} \\ \dfrac{2}{x-1}=0 & \Rightarrow \quad \textit{nunca} \\ 0=0 & \Rightarrow \quad \textit{siempre} \end{cases}$$

$$x \in (1,+\infty) \Rightarrow y=0$$

$$x=0 \Rightarrow f(0)=-2$$

Asíntotas:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x^2-1}\right)=0 \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}(0)=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Asíntota horizontal } y=0$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-1^-} f(x) &= \lim_{x\to-1^-}\left(\frac{2}{x^2-1}\right)=+\infty \\ \lim_{x\to-1^+} f(x) &= \lim_{x\to-1^+}\left(\frac{2}{x^2-1}\right)=-\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Asíntota vertical } x=-1$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to1^-} f(x) &= \lim_{x\to1^-}\left(\frac{2}{x-1}\right)=-\infty \\ \lim_{x\to1^+} f(x) &= \lim_{x\to1^+}(0)=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Asíntota vertical } x=1$$

No tiene asíntotas oblicuas ya que tiene dos horizontales.

Función derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2} & \textit{para} & \begin{Bmatrix} -\infty<x<-1 \\ -1<x<0 \end{Bmatrix} \\ \dfrac{-2}{(x-1)^2} & \textit{para} & 0<x<1 \\ 0 & \textit{para} & 1<x<+\infty \end{cases}$$

Estudiemos la derivabilidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0)^- = 0 \\ f'(0)^+ = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0)^- \neq f'(0)^+ \Rightarrow \text{función no derivable en } x=0$$

Puntos críticos:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}=0 & \Rightarrow \quad x=0 \notin \left\{\begin{array}{l} -\infty < x < -1 \\ -1 < x < 0 \end{array}\right\} \\ \dfrac{-2}{(x-1)^2}=0 & \Rightarrow \quad \textit{nunca} \\ 0 & \Rightarrow \quad \textit{siempre} \end{cases}$$

Crecimiento y decrecimiento:

$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	> 0	> 0	< 0	= 0
$f(x)$	crece	crece	decrece	recta

Punto anguloso máximo en $x=0$

Puntos de inflexión:

$$f''(x)= \begin{cases} \dfrac{12x^2+4}{\left(x^2-1\right)^3} & \textit{para} \quad \left\{\begin{array}{l} -\infty < x < -1 \\ -1 < x < 0 \end{array}\right\} \\ \dfrac{4}{(x-1)^3} & \textit{para} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \textit{para} \quad 1 < x < +\infty \end{cases}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{12x^2+4}{\left(x^2-1\right)^3}=0 & \Rightarrow \quad 12x^2+4 \neq 0 \\ \dfrac{4}{(x-1)^3}=0 & \Rightarrow \quad 4 \neq 0 \\ 0=0 & \Rightarrow \quad \textit{siempre} \end{cases}$$

No tiene puntos de inflexión distintos de $x \in (1,+\infty)$

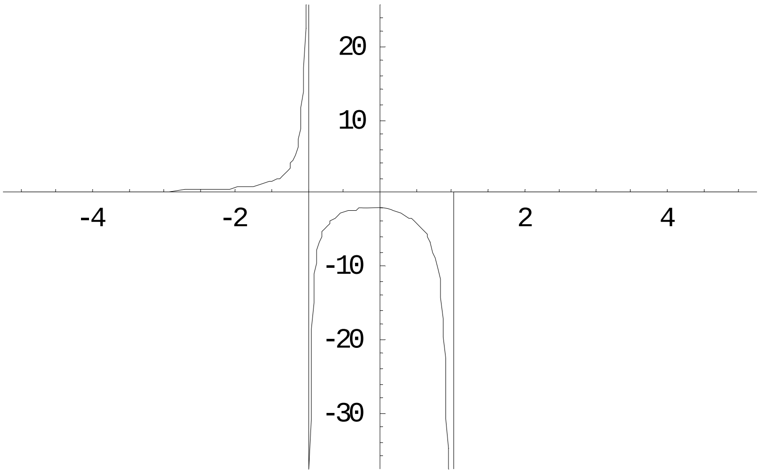
Concavidad y Convexidad:

$-\infty \qquad -1 \qquad 0 \qquad 1 \qquad +\infty$

$f''(x)$	> 0	< 0	< 0	$= 0$
$f(x)$	cóncava hacia arriba	cóncava hacia abajo	cóncava hacia abajo	recta

Hay cambios en la concavidad en $x = -1$.

Representación gráfica:



Podemos visualizar lo que ocurre en el punto anguloso $x = 0$