

# Bloque II. Aproximación Numérica

## Tema 1 Cálculo numérico de derivadas

### Ejercicios resueltos

II.1-1 Aproxima el valor de la derivada de la siguiente función cuando  $x = 1$  usando diferencias progresivas, regresivas y centrales. Utiliza en todos los casos  $h = 0.1$ . Calcula el error cometido comparando con el valor exacto al sustituir en la función derivada que se indica.

$$f(x) = \left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{-18 + 50x + 18x^2 - 18x^3}{(x^2+3)^3}$$

#### Solución

$$\text{Valor exacto: } f'(x) = \frac{-18 + 50x + 18x^2 - 18x^3}{(x^2+3)^3} \Rightarrow f'(1) = 0.5$$

$$\text{Diferencias progresivas: } f'(x_i) \approx \frac{f(x_i+h) - f(x_i)}{h}$$

$$f'(1) \approx \frac{f(1+0.1) - f(1)}{0.1} = \frac{0.298464 - 0.25}{0.1} = 0.48464$$

$$ERROR = |0.5 - 0.48464| = 0.01536$$

$$\text{Diferencias regresivas: } f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_i-h)}{h}$$

$$f'(1) \approx \frac{f(1) - f(1-0.1)}{0.1} = \frac{0.25 - 0.199089}{0.1} = 0.509107$$

$$ERROR = |0.509107 - 0.5| = 0.009107$$

$$\text{Diferencias centrales: } f'(x_i) \approx \frac{f(x_i+h) - f(x_i-h)}{2h}$$

$$f'(1) \approx \frac{f(1+0.1) - f(1-0.1)}{0.1} = \frac{0.298464 - 0.199089}{0.1} = 0.496875$$

$$ERROR = |0.5 - 0.496875| = 0.003125$$

II.1-2 Aproxima el valor de la derivada de la siguiente función cuando  $x = 2$  usando diferencias progresivas, regresivas y centrales. Utiliza en todos los casos  $h = 0.2$ . Calcula el error cometido comparando con el valor exacto al sustituir en la función derivada que se indica.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + 4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 12}{3(x^2 + 4)^{4/3}}$$

### Solución

Valor exacto:  $f'(x) = \frac{x^2 + 12}{3(x^2 + 4)^{4/3}} \Rightarrow f'(2) = 0.3333333333$

Diferencias progresivas:  $f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$

$$f'(2) \approx \frac{f(2 + 0.2) - f(2)}{0.2} = \frac{1.06399 - 1}{0.2} = 0.31995$$

$$ERROR = |0.3333333333 - 0.31995| = 0.01338333$$

Diferencias regresivas:  $f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h}$

$$f'(2) \approx \frac{f(2) - f(2 - 0.2)}{0.2} = \frac{1 - 0.93045}{0.2} = 0.347751$$

$$ERROR = |0.347751 - 0.3333333333| = 0.0144173$$

Diferencias centrales:  $f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h}$

$$f'(2) \approx \frac{f(2 + 0.2) - f(2 - 0.2)}{0.4} = \frac{1.06399 - 0.93045}{0.4} = 0.33385$$

$$ERROR = |0.33385 - 0.3333333333| = 0.000516667$$

II.1-3 Aproxima el valor de la derivada de la siguiente función cuando  $x = 0$  usando diferencias progresivas, regresivas y centrales. Utiliza en todos los casos  $h = 0.2$ . Calcula el error cometido comparando con el valor exacto al sustituir en la función derivada que se indica.

$$f(x) = \ln \sqrt[3]{1-x^4} \Rightarrow f'(x) = -\frac{4x^3}{3(1-x^4)}$$

### Solución

Valor exacto:  $f'(x) = -\frac{4x^3}{3(1-x^4)} \Rightarrow f'(0) = 0$

Diferencias progresivas:  $f'(x_i) \approx \frac{f(x_i+h) - f(x_i)}{h}$

$$f'(0) \approx \frac{f(0+0.2) - f(0)}{0.2} = \frac{-0.00053376 - 0}{0.2} = -0.0026688$$

$$ERROR = |-0.0026688 - 0| = 0.0026688$$

Diferencias regresivas:  $f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_i-h)}{h}$

$$f'(0) \approx \frac{f(0) - f(0-0.2)}{0.2} = \frac{0 + 0.00053376}{0.2} = 0.0026688$$

$$ERROR = |0.0026688 - 0| = 0.0026688$$

Diferencias centrales:  $f'(x_i) \approx \frac{f(x_i+h) - f(x_i-h)}{2h}$

$$f'(0) \approx \frac{f(0+0.2) - f(0-0.2)}{0.4} = \frac{-0.00053376 + 0.00053376}{0.4} = 0$$

$$ERROR = |0 - 0| = 0$$

II.1-4 Aproxima el valor de la segunda y tercera derivadas de la siguiente función cuando  $x = 1$  usando diferencias progresivas, regresivas y centrales. Utiliza en todos los casos  $h = 0.1$ . Calcula el error cometido comparando con el valor exacto.

$$f(x) = \left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{-18 + 50x + 18x^2 - 18x^3}{(x^2+3)^3}$$

$$f''(x) = \frac{150 + 216x - 412x^2 - 72x^3 + 54x^4}{(x^2+3)^4}$$

$$f'''(x) = \frac{648 - 3672x - 2160x^2 + 3120x^3 + 360x^4 - 216x^5}{(x^2+3)^5}$$

### Solución

#### DERIVADA SEGUNDA

Valor exacto:  $f''(1) = -0.25$

Diferencias progresivas:  $f''(x_i) \approx \frac{f(x_i + 2h) - 2f(x_i + h) + f(x_i)}{h^2}$

$$f''(1) \approx \frac{f(1 + 0.2) - 2f(1 + 0.1) + f(1)}{0.1^2} = \frac{0.34291 - 2 \cdot 0.298464 + 0.25}{0.01} = -0.401687$$

$$ERROR = |-0.401687 + 0.25| = 0.1518$$

Diferencias regresivas:  $f''(x_i) \approx \frac{f(x_i) - 2f(x_i - h) + f(x_i - 2h)}{h^2}$

$$f''(1) \approx \frac{f(1) - 2f(1 - 0.1) + f(1 - 0.2)}{0.1^2} = \frac{0.25 - 2 \cdot 0.199089 + 0.147929}{0.01} = -0.0249$$

$$ERROR = |-0.0249 + 0.25| = 0.2251$$

Diferencias centrales:  $f''(x_i) \approx \frac{f(x_i + h) - 2f(x_i) + f(x_i - h)}{h^2}$

$$f''(1) \approx \frac{f(1 + 0.1) - 2f(1) + f(1 - 0.1)}{0.1^2} = \frac{0.298464 - 2 \cdot 0.25 + 0.199089}{0.01} = -0.2447$$

$$ERROR = |-0.2447 + 0.25| = 0.0053$$

## DERIVADA TERCERA

Valor exacto:  $f'''(1) = -1.875$

Diferencias progresivas:

$$f'''(x_i) \approx \frac{f(x_i + 3h) - 3f(x_i + 2h) + 3f(x_i + h) - f(x_i)}{h^3}$$

$$\begin{aligned} f'''(1) &\approx \frac{f(1 + 0.3) - 3f(1 + 0.2) + 3f(1 + 0.1) - f(1)}{0.1^3} = \\ &= \frac{0.382341 - 3 \cdot 0.34291 + 3 \cdot 0.298464 - 0.25}{0.001} = -0.997 \end{aligned}$$

$$ERROR = |-0.997 + 1.875| = 0.878$$

Diferencias regresivas:

$$f'''(x_i) \approx \frac{f(x_i) - 3f(x_i - h) + 3f(x_i - 2h) - f(x_i - 3h)}{h^3}$$

$$\begin{aligned} f'''(1) &\approx \frac{f(1) - 3f(1 - 0.1) + 3f(1 - 0.2) - f(1 - 0.3)}{0.1^3} = \\ &= \frac{0.25 - 3 \cdot 0.199089 + 3 \cdot 0.147929 - 0.0993424}{0.001} = -2.8224 \end{aligned}$$

$$ERROR = |-2.8224 + 1.875| = 0.9474$$

Diferencias centrales:

$$f'''(x_i) \approx \frac{f(x_i + 2h) - 2f(x_i + h) + 2f(x_i - h) - f(x_i - 2h)}{2h^3}$$

$$\begin{aligned} f'''(1) &\approx \frac{f(1 + 0.2) - 2f(1 + 0.1) + 2f(1 - 0.1) - f(1 - 0.2)}{2 \cdot 0.1^3} = \\ &= \frac{0.34291 - 2 \cdot 0.298464 + 2 \cdot 0.199089 - 0.147929}{0.002} = -1.8845 \end{aligned}$$

$$ERROR = |-1.8845 + 1.875| = 0.0095$$