

Bloque II. Aproximación Numérica

Tema 3 Resolución aproximada de ecuaciones

Ejercicios resueltos

II.3-1 Resuelve de forma aproximada la ecuación $f(x) = 0$ en cada uno de los casos siguientes. Utiliza el método de bisección en el intervalo que se indica y el de Newton-Rapson y Newton modificado a partir de un punto inicial adecuado. Para todos los casos, se para cuando el valor de la función es menor que 0.001.

- a) $f(x) = \ln(x) + x$ $I = [0.5, 1]$
 b) $f(x) = e^x + x$ $I = [-1, 0]$
 c) $f(x) = 3x - 7$ $I = [2, 3]$
 d) $f(x) = \sin(x) - \cos(x)$ $I = [0, 1]$

Solución

a) $f(x) = \ln(x) + x$ $I = [0.5, 1]$

BISECCIÓN:

x	0,5	1
f(x)	-0,19314718	1
	-	+

		inicio	medio	final
	punto	0,5	0,75	1
intervalo 1	función	-0,19314718	0,46231793	1
		-	+	+
		inicio	medio	final
	punto	0,5	0,625	0,75
intervalo 2	función	-0,19314718	0,15499637	0,46231793
		-	+	+
		inicio	medio	final
	punto	0,5	0,5625	0,625
intervalo 3	función	-0,19314718	-0,01286414	0,15499637
		-	-	+

		inicio	medio	final
	punto	0,5625	0,59375	0,625
intervalo 4	función	-0,01286414	0,07245308	0,15499637
		-	+	+
		inicio	medio	final
	punto	0,5625	0,578125	0,59375
intervalo 5	función	-0,01286414	0,03015983	0,07245308
		-	+	+
		inicio	medio	final
	punto	0,5625	0,5703125	0,578125
intervalo 6	función	-0,01286414	0,00874168	0,03015983
		-	+	+
		inicio	medio	final
	punto	0,5625	0,56640625	0,5703125
intervalo 7	función	-0,01286414	-0,00203745	0,00874168
		-	-	+
		inicio	medio	final
	punto	0,56640625	0,56835938	0,5703125
intervalo 8	función	-0,00203745	0,00335802	0,00874168
		-	+	+
		inicio	medio	final
	punto	0,56640625	0,56738281	0,56835938
intervalo 9	función	-0,00203745	0,00066176	0,00335802
			x	f(x)
		solución	0,56738281	0,00066176

NEWTON-RAPSON:

	x _n	función	derivada	x _{n+1}	
n=0	0,75	0,46231793	2,33333333	0,55186375	
n=1	0,55186375	-0,04259036	2,81204148	0,56700945	
n=2	0,56700945	-0,00036985			
				x	f(x)
		solución		0,56700945	-0,00036985

NEWTON-MEJORADO:

	x _n	función	derivada	x _{n+1}	
n=0	0,75	0,46231793	2,33333333	0,55186375	
n=1	0,55186375	-0,04259036	2,33333333	0,57011676	
n=2	0,57011676	0,00820265	2,33333333	0,56660133	
n=4	0,56660133	-0,001498	2,33333333	0,56724334	
n=5	0,56724334	0,00027643			
				x	f(x)
		solución		0,56724334	0,00027643

$$b) f(x) = e^x + x$$

$$I = [-1, 0]$$

BISECCIÓN:

x	-1	0
f(x)	-0,63212056	1
	-	+

		inicio	medio	final
	punto	-1	-0,5	0
intervalo 1	función	-0,63212056	0,10653066	1
		-	+	+
		inicio	medio	final
	punto	-1	-0,75	-0,5
intervalo 2	función	-0,63212056	-0,27763345	0,10653066
		-	-	+
		inicio	medio	final
	punto	-0,75	-0,625	-0,5
intervalo 3	función	-0,27763345	-0,08973857	0,10653066
		-	-	+
		inicio	medio	final
	punto	-0,625	-0,5625	-0,5
intervalo 4	función	-0,08973857	0,00728282	0,10653066
		-	+	+
		inicio	medio	final
	punto	-0,625	-0,59375	-0,5625
intervalo 5	función	-0,08973857	-0,04149755	0,00728282
		-	-	+
		inicio	medio	final
	punto	-0,59375	-0,578125	-0,5625
intervalo 6	función	-0,04149755	-0,01717584	0,00728282
		-	-	+
		inicio	medio	final
	punto	-0,578125	-0,5703125	-0,5625
intervalo 7	función	-0,01717584	-0,00496376	0,00728282
		-	-	+
		inicio	medio	final
	punto	-0,5703125	-0,56640625	-0,5625
intervalo 8	función	-0,00496376	0,0011552	0,00728282
		-	+	+
		inicio	medio	final
	punto	-0,5703125	-0,56835938	-0,56640625
intervalo 9	función	-0,00496376	-0,00190536	0,0011552
		-	-	+
		inicio	medio	final
	punto	-0,56835938	-0,56738281	-0,56640625
intervalo 10	función	-0,00190536	-0,00037535	0,0011552
			x	f(x)
		solución bisección:		-0,56738281
				-0,00037535

NEWTON-RAPSON:

	xn	función	derivada	xn+1	
n=0	-0,5	0,10653066	1,60653066	-0,566311	
n=1	-0,566311	0,00130451	1,56761551	-0,56714317	
n=2	-0,56714317	1,9648E-07			
				x	f(x)
		solución		-0,56714317	1,9648E-07

NEWTON-MODIFICADO:

	xn	función	derivada	xn+1	
n=0	-0,5	0,10653066	1,60653066	-0,566311	
n=1	-0,566311	0,00130451	1,60653066	-0,56712301	
n=2	-0,56712301	3,1786E-05			
				x	f(x)
		solución		-0,56712301	3,17863E-05

c) $f(x) = 3x - 7$ $I = [2, 3]$

BISECCIÓN:

x	2	3
f(x)	-1	2
	-	+

		inicio	medio	final
	punto	2	2,5	3
intervalo 1	función	-1	0,5	2
		-	+	+
		inicio	medio	final
	punto	2	2,25	2,5
intervalo 2	función	-1	-0,25	0,5
		-	-	+
		inicio	medio	final
	punto	2,25	2,375	2,5
intervalo 3	función	-0,25	0,125	0,5
		-	+	+
		inicio	medio	final
	punto	2,25	2,3125	2,375
intervalo 4	función	-0,25	-0,0625	0,125
		-	-	+
		inicio	medio	final
	punto	2,3125	2,34375	2,375
intervalo 5	función	-0,0625	0,03125	0,125
		-	+	+
		inicio	medio	final
	punto	2,3125	2,328125	2,34375
intervalo 6	función	-0,0625	-0,015625	0,03125
		-	-	+

		inicio	medio	final
	punto	2,328125	2,3359375	2,34375
intervalo 7	función	-0,015625	0,0078125	0,03125
		-	+	+
		inicio	medio	final
	punto	2,328125	2,33203125	2,3359375
intervalo 8	función	-0,015625	-0,00390625	0,0078125
		-	-	+
		inicio	medio	final
	punto	2,33203125	2,33398438	2,3359375
intervalo 9	función	-0,00390625	0,00195313	0,0078125
		-	+	+
		inicio	medio	final
	punto	2,33203125	2,33300781	2,33398438
intervalo 10	función	-0,00390625	-0,00097656	0,00195313
			x	f(x)
	solución		2,33300781	-0,00097656

NEWTON-RAPSON:

	xn	función	derivada	xn+1	
n=0	2,5	0,5	3	2,33333333	
n=1	2,33333333	0			
				x	f(x)
		solución		2,33333333	0

NEWTON-MODIFICADO:

	xn	función	derivada	xn+1	
n=0	2,5	0,5	3	2,33333333	
n=1	2,33333333	0			
				x	f(x)
		solución		2,33333333	0

d) $f(x) = \sin(x) - \cos(x)$ $I = [0,1]$

BISECCIÓN:

x	0	1
f(x)	-1	0,30116868
	-	+

		inicio	medio	final
	punto	0	0,5	1
intervalo 1	función	-1	-0,39815702	0,30116868
		-	-	+

		inicio	medio	final
	punto	0,5	0,75	1
intervalo 2	función	-0,39815702	-0,05005011	0,30116868
		-	-	+
		inicio	medio	final
	punto	0,75	0,875	1
intervalo 3	función	-0,05005011	0,12654664	0,30116868
		-	+	+
		inicio	medio	final
	punto	0,75	0,8125	0,875
intervalo 4	función	-0,05005011	0,03832309	0,12654664
		-	+	+
		inicio	medio	final
	punto	0,75	0,78125	0,8125
intervalo 5	función	-0,05005011	-0,00586637	0,03832309
		-	-	+
		inicio	medio	final
	punto	0,78125	0,796875	0,8125
intervalo 6	función	-0,00586637	0,01623034	0,03832309
		-	+	+
		inicio	medio	final
	punto	0,78125	0,7890625	0,796875
intervalo 7	función	-0,00586637	0,00518214	0,01623034
		-	+	+
		inicio	medio	final
	punto	0,78125	0,78515625	0,7890625
intervalo 8	función	-0,00586637	-0,00034212	0,00518214
			x	f(x)
		solución		0,78515625 -0,00034212

NEWTON-RAPSON:

	x _n	función	derivada	x _{n+1}	
n=0	0,5	-0,39815702	1,3570081	0,79340799	
n=1	0,79340799	0,01132749	1,414168197	0,78539799	
n=2	0,78539799	-2,4226E-07			
				x	f(x)
		solución		0,78539799	-2,4226E-07

NEWTON-MODIFICADO:

	x _n	función	derivada	x _{n+1}	
n=0	0,5	-0,39815702	1,3570081	0,79340799	
n=1	0,79340799	0,01132749	1,3570081	0,78506059	
n=2	0,78506059	-0,0004774	1,3570081	0,78541239	
				x	f(x)
		solución		0,78506059	-0,0004774

II.3-2 Supongamos una población que evoluciona según la siguiente función:

$$p(t) = 50e^t - \frac{2t}{3}$$

La variable t representa un tiempo continuo. Queremos evaluar aproximadamente el instante en que la población será de 800 individuos. Para ello seguir los siguientes pasos:

- Encontrar una función, $f(t)$, de modo que la solución del problema se obtenga al resolver $f(t) = 0$.
- Comprobar que hay una solución en el intervalo $[2; 3]$ y aplicar el método de Bisección dos veces para dar un punto inicial x_0 para el método de Newton-Rapson.
- Partiendo de este punto inicial, aplicar el método de Newton-Rapson hasta conseguir un valor de la función menor que 10^{-3} .

Solución

- Queremos resolver el problema no lineal:

$$p(t) - 800 = 0 \Rightarrow f(t) = 50e^t - \frac{2t}{3} - 800 = 0$$

-

t	2	3
f(t)	-431,8805284	202,276846
	-	+

		inicio	medio	final
	punto	2	2,5	3
intervalo 1	función	-431,880528	-192,541969	202,276846
		-	-	+
		inicio	medio	final
	punto	2,5	2,75	3
intervalo 2	función	-192,541969	-19,7017391	202,276846
		-	-	+
		inicio	medio	final
	punto	2,75	2,875	3
intervalo 3	función	-19,7017391	84,3545394	202,276846
		-	+	+
			t	f(t)
	punto inicio Newton		2,875	84,3545394

-

	tn	función	derivada	tn+1	
n=0	2,875	84,3545394	885,6045394	2,7797492	
n=1	2,7797492	3,89577541	805,0822749	2,77491022	
n=2	2,77491022	0,00941839	801,1926919	2,77489847	
n=3	2,77489847	5,5405E-08			
				t	f(t)
		solución newton:		2,77491022	0,00941839