

Bloque II. Aproximación Numérica

Tema 5 Ajuste por Mínimos Cuadrados

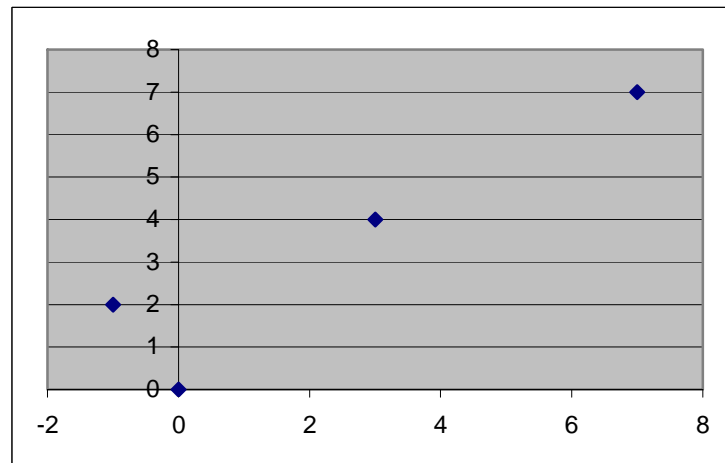
Ejercicios resueltos

II.5-1 Ajustar los siguientes datos a una recta por mínimos cuadrados:

x	-1	0	3	7
f(x)	2	0	4	7

Dibujar la nube de puntos y estimar el valor de la función en $x = 1$.

Solución



n	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
4	-1	2	1	-2
	0	0	0	0
	3	4	9	12
	7	7	49	49
	9	13	59	59

$$\left. \begin{aligned} a \cdot n + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n f_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^n x_i + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 4a + 9b &= 13 \\ 9a + 59b &= 59 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a = 1.52258 \\ b = 0.767742 \end{cases}$$

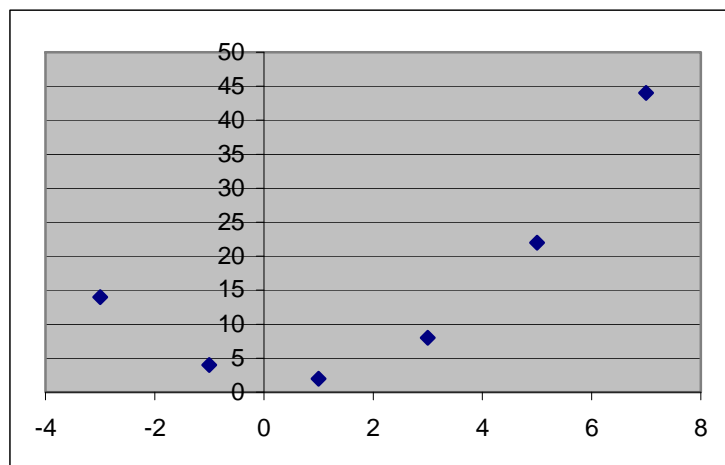
$$y = 1.52258 + 0.767742 \cdot x \xrightarrow{x=1} f(1) \approx 2.290322$$

II.5-2 Ajustar los siguientes datos a una recta por mínimos cuadrados:

x	-3	-1	1	3	5	7
f(x)	14	4	2	8	22	44

Dibujar la nube de puntos y estimar el valor de la función en $x = 0$ y $x = 2$

Solución



n	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
6	-3	14	9	-42
	-1	4	1	-4
	1	2	1	2
	3	8	9	24
	5	22	25	110
	7	44	49	308
	12	94	94	398

$$\left. \begin{array}{l} a \cdot n + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n f_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^n x_i + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6a + 12b = 94 \\ 12a + 94b = 398 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a = 9.66667 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$y = 9.66667 + 3 \cdot x \xrightarrow{x=0} f(0) \approx 9.66667$$

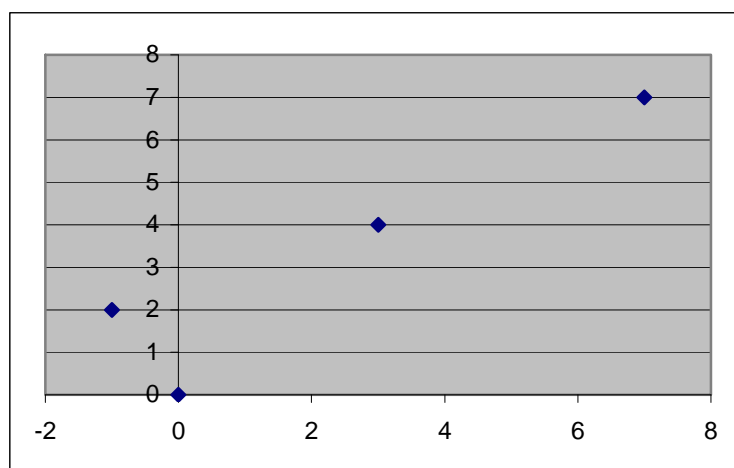
$$y = 9.66667 + 3 \cdot x \xrightarrow{x=2} f(2) \approx 15.66667$$

II.5-3 Ajustar los siguientes datos a una parábola por mínimos cuadrados:

x	-1	0	3	7
f(x)	2	0	4	7

Dibujar la nube de puntos y estimar el valor de la función en $x = 1$.

Solución



n	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$	x_i^3	x_i^4	$x_i^2 \cdot y_i$
4	-1	2	1	-2	-1	1	2
	0	0	0	0	0	0	0
	3	4	9	12	27	81	36
	7	7	49	49	343	2401	343
	9	13	59	59	369	2483	381

$$\left. \begin{aligned} a_0 \cdot n + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n f_i \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^3 &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^4 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot f_i \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 4a_0 + 9a_1 + 59a_2 &= 13 \\ 9a_0 + 59a_1 + 369a_2 &= 59 \\ 59a_0 + 369a_1 + 2483a_2 &= 381 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 1.47545 \\ a_1 = 0.489371 \\ a_2 = 0.0456587 \end{cases}$$

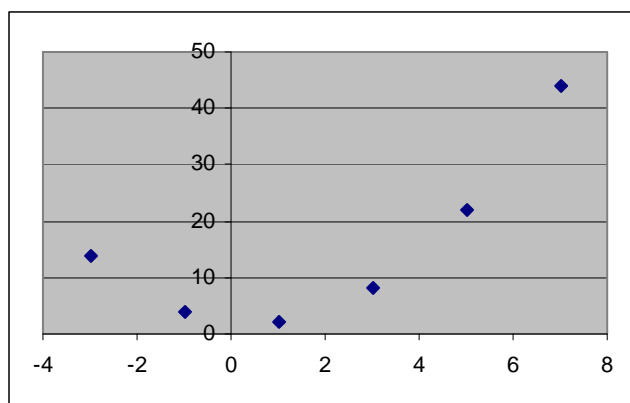
$$y = 1.47545 + 0.489371 \cdot x + 0.0456587 \cdot x^2 \xrightarrow{x=1} f(1) \approx 2.0104797$$

II.5-4 Ajustar los siguientes datos a una parábola por mínimos cuadrados:

x	-3	-1	1	3	5	7
f(x)	14	4	2	8	22	44

Dibujar la nube de puntos y estimar el valor de la función en $x = 0$ y $x = 2$

Solución



n	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$	x_i^3	x_i^4	$x_i^2 \cdot y_i$
6	-3	14	9	-42	-27	81	126
	-1	4	1	-4	-1	1	4
	1	2	1	2	1	1	2
	3	8	9	24	27	81	72
	5	22	25	110	125	625	550
	7	44	49	308	343	2401	2156
	12	94	94	398	468	3190	2910

$$\left. \begin{aligned} a_0 \cdot n + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n f_i \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^3 &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^4 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot f_i \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 6a_0 + 12a_1 + 94a_2 &= 94 \\ 12a_0 + 94a_1 + 468a_2 &= 398 \\ 94a_0 + 468a_1 + 3190a_2 &= 2910 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = -1 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

$$y = 2 - x + x^2 \xrightarrow{x=0} f(0) \approx 2$$

$$y = 2 - x + x^2 \xrightarrow{x=2} f(2) \approx 4$$