Ejercicios resueltos

III.1-1 Calcula el producto de matrices $A \cdot B$ siendo A y B:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

Solución

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

III.1-2 Calcula $(A\cdot B)^T$, siendo $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}3&3&3\\2&2&2\end{pmatrix}$:

Solución

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&3&3\\2&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&3\\5&5&5\end{pmatrix}\Rightarrow(A\cdot B)^T=\begin{pmatrix}3&5\\3&5\\3&5\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\\ B=\begin{pmatrix}3&3&3\\2&2&2\end{pmatrix}\Rightarrow B^T=\begin{pmatrix}3&2\\3&2\\3&2\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T=\begin{pmatrix}3&2\\3&2\\3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\3&5\\3&5\end{pmatrix}$$

III.1-3 Una fábrica produce *n* artículos y tiene *m* clientes. El resumen mensual de ventas se anota en una matriz, donde cada cliente dispone de un vector fila cuyas componentes indican las cantidades adquiridas de cada artículo. Así a_{ij} indicará que el cliente *i* ha adquirido a_{ij} unidades del artículo *j*.

a) Supongamos que la matriz de ventas de Enero ha sido la siguiente:

$$\begin{pmatrix}9&5&2\\3&8&0\\0&0&0\\6&7&-1\end{pmatrix}$$

Interpreta el significado de dicha matriz.

b) Sabemos que durante el mes de Febrero se han realizado las siguientes ventas: el primer cliente ha comprado 5 unidades del primer artículo, 2 del segundo y 3 del tercero; el segundo cliente, 6 unidades de cada uno; el tercero sólo 4 unidades del primer artículo y el cuarto no ha comprado nada. Construye la matriz de ventas de Febrero. Halla las ventas conjuntas de Enero y Febrero.

c) Supongamos que las ventas de Febrero han duplicado las de Enero, y las de Marzo han cuadruplicado las de Febrero. Halla el total de ventas en el primer trimestre.

d) Sea **a** la fila correspondiente a un cierto cliente y **p** la columna de precios de los artículos. Estudia si tienen alguna interpretación práctica los productos **ap** y **pa**.

Solución

a)

$$\text{clientes} \rightarrow \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \rightarrow \text{articulos} \\ \begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix} = E \end{array}$$

1er cliente compra: 9 unidades del artículo A, 5 del B, 2 del C

2º cliente compra: 3 unidades del artículo A, 8 del B.

3º cliente no compra nada

4º cliente compra: 6 unidades del artículo A, 7 del B y devuelve 1 de C

b) Llamaremos *F* a la matriz de ventas de febrero:

$$F = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E + F = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 5 \\ 9 & 14 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Llamaremos *F* a la matriz de ventas de febrero y *M* a la de marzo

Si $\left.\begin{array}{l} F = 2E \\ M = 4F \end{array}\right\} \Rightarrow$ el total de ventas del primer trimestre, *T*, será:

$$T = E + F + M = E + 2E + 8E = 11E$$

$$T = 11 \cdot \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} = 11 \cdot (9+5+2+3+8+6+7-1) = 11 \cdot 39 = 429$$

artículos vendidos en el primer trimestre.

d) $a \cdot p \equiv$ lo que gasta en el total de compras.

$p \cdot a \equiv$ no tiene ninguna interpretación práctica.

Ejemplo:

Si $a = (9 \quad 5 \quad 2)$ primer cliente y $p = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$ precios de los artículos *A, B, C*

$$a \cdot p = (9 \quad 5 \quad 2)\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = 90 + 100 + 60 = 250 \text{ unidades monetarias}$$

$$p \cdot a = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}(9 \quad 5 \quad 2) = \begin{pmatrix} 90 & 50 & 20 \\ 180 & 100 & 40 \\ 270 & 150 & 60 \end{pmatrix}$$

III.1-4 Una fábrica de coches produce tres mode los: monovol umen (mo), de l ujo (lu) y económico (ec). Cada coche n ecesita las cantidades de ca da uno de los siguientes conceptos, relacionados en la matriz *C*, en unidades conven ientemente elegidas: materiales (m), personal (p), impuestos (i) y transporte (t).

$$C = \begin{array}{c} \begin{matrix} m & p & i & t \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 7 & 10 & 5 & 2 \\ 8 & 9 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} mo \\ lu \\ ec \end{matrix}; \quad P = \begin{array}{c} \begin{matrix} mo & lu & ec \end{matrix} \\ (60 \quad 40 \quad 90) \end{array}; \quad V = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ p \\ i \\ t \end{matrix}$$

La matriz *P* indica la producción semanal y la matriz *V* el valor de una unidad de cada concepto. Obténgase las matrices que representan lo siguiente:

a) Las unidades semanales necesarias de cada concepto.

b) Los costes de un coche de cada modelo.

c) El coste total de la producción semanal

Solución

a) Las unidades semanales necesarias de cada concepto se obtendrán al multiplicar la producción por lo que necesita cada coche es decir: $P \cdot C$

$$P \cdot C = (60 \quad 40 \quad 90)\begin{pmatrix} 7 & 10 & 5 & 2 \\ 8 & 9 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1.190 \quad 1.590 \quad 600 \quad 330) \text{ unidades}$$

semanales

b) Los costes de un coche de cada modelo será los conceptos que se necesitan por el valor de cada uno de los conceptos es decir: $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{V}$

$$\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 5 & 2 \\ 8 & 9 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 224 \\ 202 \\ 146 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \boldsymbol{mo} \\ \boldsymbol{lu} \\ \boldsymbol{ec} \end{array}$$ costes de un coche de cada modelo.

c) El coste total de la producción semanal será la producción por el coste de un coche de cada modelo es decir: $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{V}$

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 60 & 40 & 90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 224 \\ 202 \\ 146 \end{pmatrix} = 13.440 + 8.080 + 13.140 = 34.660$$

unidades monetarias.

III.1-5 Calcula la inversa de las siguientes matrices por el método de eliminación de Gauss:

a) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\1&0&2&2\\0&0&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}$

e) $E=\begin{pmatrix}1&3&1&1\\2&5&0&0\\1&0&2&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$

Solución

a) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\to F_2-F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\to F_1-F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&1\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

b) $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to F_2-F_3]{F_1\to F_1-F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&-1\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\to F_1-F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&0\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$c)\quad C=\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2&3&1&0\\3&4&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\to\frac{1}{2}F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&3/2&1/2&0\\3&4&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\to F_2-3F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&3/2&1/2&0\\0&-1/2&-3/2&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\to F_1+3F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-4&3\\0&-1/2&-3/2&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\to -2F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-4&3\\0&1&3&-2\end{array}\right)\Rightarrow C^{-1}=\begin{pmatrix}-4&3\\3&-2\end{pmatrix}$$

$$d)\quad D=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\1&0&2&2\\0&0&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&3&1&0&0&0\\1&0&2&2&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&0&1&0\\0&1&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\to F_2-F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&3&1&0&0&0\\0&-2&2&-1&-1&1&0&0\\0&0&1&1&0&0&1&0\\0&1&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\to F_2+2F_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&3&1&0&0&0\\0&0&2&1&-1&1&0&2\\0&0&1&1&0&0&1&0\\0&1&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&3&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&1\\0&0&1&1&0&0&1&0\\0&0&2&1&-1&1&0&2\end{array}\right)\xrightarrow{F_4\to F_4-2F_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&3&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&1\\0&0&1&1&0&0&1&0\\0&0&0&-1&-1&1&-2&2\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_2\to F_2+F_4\\F_3\to F_3+F_4}]{F_1\to F_1+3F_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&0&-2&3&-6&6\\0&1&0&0&-1&1&-2&3\\0&0&1&0&-1&1&-1&2\\0&0&0&-1&-1&1&-2&2\end{array}\right)\xrightarrow[F_4\to -F_4]{F_1\to F_1-2F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e)}\ \ \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 3F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 5 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_4 \to F_4 - 7F_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 & -3 & 1 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 - 2F_4 \\ F_3 \to F_3 + F_4}]{F_1 \to F_1 + F_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 6 & -3 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -12 & 7 & -2 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 & -3 & 1 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2 + 2F_3]{F_1 \to F_1 - F_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 & -3 & 1 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 + 3F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 & -3 & 1 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 \to -F_4]{F_2 \to -F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{E}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 5 & -3 & 1 & -6 \\ -5 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

III.1-6 Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$a)\quad A=\begin{pmatrix}1 & -5 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & -17 & -1\end{pmatrix}$$

$$b)\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 2\\ 8 & 4 & 4\\ -2 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$c)\quad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -3 & -7 & 2\end{pmatrix}$$

Solución

$$a)\quad \begin{pmatrix}1 & -5 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & -17 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{F_2\to F_2-3F_1} \begin{pmatrix}1 & -5 & 0\\ 0 & 17 & 1\\ 0 & -17 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{F_3\to F_3+F_2} \begin{pmatrix}1 & -5 & 0\\ 0 & 17 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow rango(A)=2$$

$$b)\quad \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 2\\ 8 & 4 & 4\\ -2 & -1 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3\to F_3-4F_1\\ F_4\to F_4+F_1}]{F_2\to F_2-2F_1} \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow rango(B)=1$$

$$c)\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -3 & -7 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[F_3\to F_3-F_1]{F_2\to F_2+F_1} \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -3 & -9 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{F_3\to F_3+3F_2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow rango(C)=3$$

III.1-7 Calcula el rango de *A*, *B*, *C* según los valores del parámetro:

$$a)A=\begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2(m+1) & m+1 \end{pmatrix} \qquad b)B=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad c)C=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -a \\ 2 & 6 & -2a \\ 1 & 3 & a+1 \end{pmatrix}$$

Solución

$$a)\quad A=\begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2(m+1) & m+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 2 & m & 2 \\ m-2 & 2 & -1 \\ 2m & 2(m+1) & m+1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3\to F_3-mF_1]{F_2\to F_2-\frac{1}{2}(m-2)F_1} \begin{pmatrix} 2 & m & 2 \\ 0 & 2-\dfrac{m}{2}(m-2) & -1-(m-2) \\ 0 & 2(m+1)-m^2 & 1-m \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & m & 2 \\ 0 & \dfrac{-m^2}{2}+m+2 & 1-m \\ 0 & -m^2+2m+2 & 1-m \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3\to F_3-F_2} \begin{pmatrix} 2 & m & 2 \\ 0 & \dfrac{-m^2}{2}+m+2 & 1-m \\ 0 & \dfrac{-m^2}{2}+m & 0 \end{pmatrix}$$

$$i)\quad \textit{Si}\quad \frac{-m^2}{2}+m=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=2 \end{cases} \Rightarrow rango(A)\le 2$$

Si $m=0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rango(A)=2$$

Si $m=2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rango(A)=2$$

$$ii)\quad \textit{Si}\quad \frac{-m^2}{2}+m\neq 0 \Rightarrow rango(A)\ge 2$$

$$\bullet)\quad \textit{Si}\quad \frac{-m^2}{2}+m+2=0 \Rightarrow \begin{cases} m=1+\sqrt{5} \\ m=1-\sqrt{5} \end{cases}$$

$$A\sim\begin{pmatrix} 2 & 1\pm\sqrt{5} & 2 \\ 0 & 0 & 1-\left(1\pm\sqrt{5}\right) \\ 0 & \neq 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rango(A)=3$$

$$\bullet)\ \ \textit{Si}\ \ m=1 \Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rango(A)=2$$

Resumen

$$\textit{Si}\ \ m=0,2,1 \Rightarrow rango(A)=2$$
$$\textit{Si}\ \ m\neq 0,2,1 \Rightarrow rango(A)=3$$

$$b)\ \ B=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3\to F_3-F_1]{F_2\to F_2-aF_1} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3\to F_3+F_2}$$

$$\xrightarrow{F_3\to F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & -a^2-a+2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$i)\ \ \textit{Si}\ \ a^2+a-2=0 \Rightarrow \begin{cases} a= & 1 \\ a= & -2 \end{cases}$$

$$\bullet)\ \ \textit{Si}\ \ a=1 \Rightarrow B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rango(B)=1$$

$$\bullet)\ \ \textit{Si}\ \ a=-2 \Rightarrow B \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rango(B)=2$$

$$ii)\ \ \textit{Si}\ \ a\neq 1,-2 \Rightarrow rango(B)=3$$

$$c)\ \ C=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -a \\ 2 & 6 & -2a \\ 1 & 3 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & a+1 \\ 2 & 6 & -2a \\ 3 & 4 & -a \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3\to F_3-3F_1]{F_2\to F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & a+1 \\ 0 & 0 & -4a-2 \\ 0 & -5 & -4a-3 \end{pmatrix}$$

$$i)\ \ \textit{Si}\ \ a=-\frac{1}{2} \Rightarrow rango(C)=2$$

$$ii)\ \ \textit{Si}\ \ a\neq -\frac{1}{2} \Rightarrow rango(C)=3$$