

Bloque IV. Ecuaciones Diferenciales de primer orden

Tema 3 Aplicaciones de E. D. de primer orden

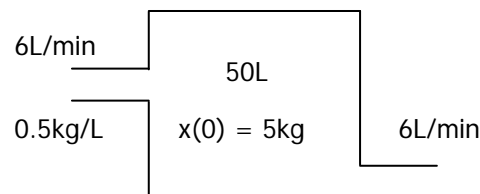
Ejercicios resueltos

IV.3-1 Una solución de salmuera de sal fluye a razón constante de 6L/min. hacia el interior de un depósito que inicialmente contiene 50L de solución de salmuera en la cual se disolvieron 5kg de sal. La solución contenida en el depósito se mantiene bien agitada y fluye hacia el exterior con la misma rapidez. Si la concentración de sal en la salmuera que entra en el depósito es de 0.5kg/L, determinar la cantidad de sal presente en el depósito al cabo de t minutos. ¿Cuándo alcanzará la concentración de sal en el depósito el valor de 0.3kg/L?

Solución

$x(t)$ = Kg. de sal dentro del depósito en el instante t

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 6 * 0.5 - 6 \frac{x}{50} \\ x(0) &= 5 \end{aligned} \right\}$$



$$\frac{dx}{dt} = \frac{75 - 3x}{25} \Rightarrow \frac{dx}{75 - 3x} = \frac{dt}{25} \Rightarrow -\frac{1}{3} \ln|75 - 3x| = \frac{t}{25} + C$$

$$\ln|75 - 3x| = -\frac{3t}{25} + C \Rightarrow 75 - 3x = Ce^{-3t/25} \Rightarrow x(t) = 25 + Ce^{-3t/25}$$

$$x(0) = 5 \Rightarrow 5 = 25 + C \Rightarrow C = -20 \Rightarrow x(t) = 25 - 20e^{-3t/25}$$

Así, la concentración será igual a:

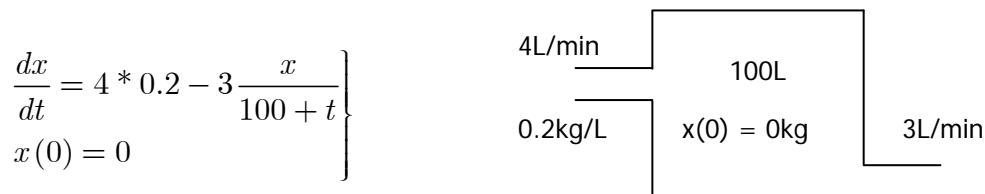
$$C(t) = \frac{x(t)}{50} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} e^{-3t/25}$$

$$0.3 = 0.5 - 0.4e^{-3t/25} \Rightarrow -0.2 = -0.4e^{-3t/25} \Rightarrow 0.5 = e^{-3t/25} \Rightarrow t = \frac{25 \ln 2}{3}$$

IV.3-2 Una solución de salmuera de sal fluye a razón constante de 4L/min. hacia el interior de un depósito que inicialmente contiene 100L de agua. La solución contenida en el depósito se mantiene bien agitada y fluye hacia el exterior a razón de 3L/min. Si la concentración de sal en la salmuera que entra en el depósito es de 0.2kg/L, determinar la cantidad de sal presente en el depósito al cabo de t minutos. ¿En qué momento la concentración de sal contenida en el depósito será de 0.1kg/L?

Solución

$x(t)$ = Kg. de sal dentro del depósito en el instante t



$$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{100 + t} x = 0.8 \Rightarrow \mu(t) = e^{\int \frac{3}{100+t} dt} = (100 + t)^3$$

$$(100 + t)^3 x(t) = 0.8 \int (100 + t)^3 dt + C = 0.8 \frac{(100 + t)^4}{4} + C$$

$$x(t) = 0.2(100 + t) + \frac{C}{(100 + t)^3}$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow 0 = 20 + \frac{C}{100^3} \Rightarrow C = -20 * 100^3 = -2 * 10^7$$

$$x(t) = 0.2(100 + t) - \frac{2 * 10^7}{(100 + t)^3} \Rightarrow C(t) = \frac{x(t)}{100 + t} = 0.2 - \frac{2 * 10^7}{(100 + t)^4}$$

$$0.1 = 0.2 - \frac{2 * 10^7}{(100 + t)^4} \Rightarrow 0.1 = \frac{2 * 10^7}{(100 + t)^4} \Rightarrow (100 + t)^4 = 2 * 10^8 \Rightarrow t = 100(\sqrt[4]{2} - 1)$$

IV.3-3 Un gran depósito está lleno con 500 litros de agua pura. Una salmuera que contiene 2 gramos de sal por litro se bombea al interior a razón de 5L/min.; la solución adecuadamente mezclada se bombea hacia fuera con la misma rapidez. Hallar el número de gramos de sal que hay en el depósito en un instante cualquiera. Resolver este mismo problema suponiendo que la solución se extrae con una rapidez de 10L/min., y calcular cuánto tiempo pasará para que se vacíe el depósito.

Solución

$x(t)$ = gramos de sal en el interior en el instante t

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 5 * 2 - 5 \frac{x}{500} \\ x(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{c} \text{5L/min} \\ \text{2g/L} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 500\text{L} \\ x(0) = 0 \end{array}} \\ \text{5L/min} \end{array}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1.000 - x}{100} \Rightarrow \frac{dx}{1.000 - x} = \frac{dt}{100} \Rightarrow \ln|1.000 - x| = -\frac{t}{100} + C$$

$$1.000 - x(t) = Ce^{-t/100} \Rightarrow x(t) = 1.000 + Ce^{-t/100}$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow 0 = 1.000 + C \Rightarrow C = -1.000 \Rightarrow x(t) = 1.000 - 1.000e^{-t/100}$$

En el otro caso:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 5 * 2 - 10 \frac{x}{500 - 5t} \\ x(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{c} \text{5L/min} \\ \text{2g/L} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 500\text{L} \\ x(0) = 0 \end{array}} \\ \text{10L/min} \end{array}$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{2}{100-t} x = 10 \Rightarrow \mu(t) = e^{\int \frac{2}{100-t} dt} = (100-t)^{-2}$$

$$(100-t)^{-2} x = 10 \int (100-t)^{-2} dt + C = \frac{10}{100-t} + C$$

$$x(t) = 10(100-t) + C(100-t)^2$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow 0 = 1.000 + 10.000C \Rightarrow C = -0.1 \Rightarrow x(t) = 10(100-t) - 0.1(100-t)^2$$

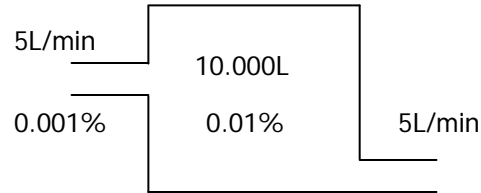
Para que se vacíe el depósito: $V(t) = 500 - 5t = 0$, esto es, $t = 100$ minutos.

IV.3-4 Una alberca cuyo volumen es de 10.000L contiene agua con el 0.01% de cloro. Empezando en $t = 0$, desde la ciudad se bombea agua que contiene 0.001% de cloro, hacia el interior de la alberca a razón de 5L/min., y el agua de la alberca fluye hacia el exterior a la misma velocidad. ¿Cuál es el porcentaje de cloro en la alberca al cabo de 1 hora? ¿Cuándo tendrá el agua de la alberca 0.002% de cloro?

Solución

$x(t)$ = litros de cloro dentro de la alberca en el instante t

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 5 * \frac{10^{-3}}{100} - 5 \frac{x}{10.000} \\ x(0) &= \frac{0.01}{100} * 10.000 = 1 \end{aligned} \right\}$$



$$\frac{dx}{dt} = \frac{5 - 50x}{100.000} \Rightarrow \frac{dx}{5 - 50x} = \frac{dt}{100.000} \Rightarrow -\frac{1}{50} \ln|5 - 50x| = \frac{t}{100.000} + C$$

$$\ln|5 - 50x| = -\frac{t}{2.000} + C \Rightarrow 5 - 50x = Ce^{-t/2.000} \Rightarrow x(t) = 0.1 + Ce^{-t/2.000}$$

$$x(0) = 1 \Rightarrow 1 = 0.1 + C \Rightarrow C = 0.9 \Rightarrow x(t) = 0.1 + 0.9e^{-t/2.000}$$

Al cabo de una hora se tiene:

$$x(60) = 0.9731 \Rightarrow 0.0097\%$$

El 0.002% de cloro es igual a 0.2 litros, que se alcanzará cuando:

$$0.2 = 0.1 + 0.9e^{-t/2.000} \Rightarrow e^{-t/2.000} = \frac{1}{9}$$

$$t = 2.000 \ln 9 = 4.394,45 \text{ minutos} = 73,24 \text{ horas}$$

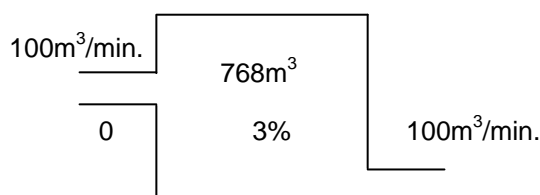
IV.3-5 El aire del interior de un pequeño cuarto con dimensiones de 12 por 8 por 8 metros contiene 3% de monóxido de carbono. Empezando en $t = 0$, se sopla aire fresco que no contiene monóxido de carbono, hacia el interior del cuarto a razón de $100\text{m}^3/\text{min}$. Si el aire del cuarto sale al exterior a través de una abertura a la misma velocidad, ¿cuándo tendrá el aire del interior del cuarto 0.01% de monóxido de carbono?

Solución

$x(t) = \text{m}^3$ de monóxido de carbono en el instante t

$$V = 12 \times 8 \times 8 = 768 \text{m}^3$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -100 \frac{x}{768} \\ x(0) &= \frac{3}{100} * 768 = 23,04 \end{aligned} \right\}$$



$$\frac{dx}{x} = -\frac{100}{768} dt \Rightarrow \ln|x| = -\frac{25}{192}t + C \Rightarrow x(t) = Ce^{-25t/192}$$

$$x(0) = 23,04 \Rightarrow C = 23,04 \Rightarrow x(t) = 23,04e^{-25t/192}$$

Calculamos el 0.01%: $x(t) = 768 * 10^{-4}$. Así pues, el tiempo transcurrido será:

$$0,0768 = 23,04e^{-25t/192} \Rightarrow e^{-25t/192} = \frac{1}{300} \Rightarrow t = 43,805 \text{ minutos}$$

IV.3-6 La corriente sanguínea lleva un medicamento hacia el interior de un órgano a razón de $3 \text{ cm}^3/\text{seg.}$, y sale de él a la misma velocidad. El órgano tiene un volumen líquido de 125 cm^3 . Si la concentración del medicamento en la sangre que entra en el órgano es de 0.2 gr./cm^3 , ¿cuál es la concentración del medicamento en el órgano en el instante t si inicialmente no había vestigio alguno del medicamento? ¿Cuándo la concentración del medicamento en el órgano será de 0.1 gr./cm^3 ?

Solución

$x(t) = \text{gramos de medicamento en el instante } t$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3 \cdot 0,2 - 3 \frac{x}{125} \\ x(0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{dx}{dt} = 0,6 - 3 \frac{x}{125} = \frac{75 - 3x}{125} \Rightarrow \frac{dx}{75 - 3x} = \frac{dt}{125} \Rightarrow -\frac{1}{3} \ln|75 - 3x| = \frac{t}{125} + C$$

$$\ln|75 - 3x| = -\frac{3t}{125} + C \Rightarrow 75 - 3x = Ce^{-\frac{3t}{125}} \Rightarrow x(t) = 25 + Ce^{-\frac{3t}{125}}$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow 0 = 25 + C \Rightarrow C = -25 \Rightarrow x(t) = 25 - 25e^{-\frac{3t}{125}}$$

$$C(t) = 0,1 \Rightarrow C(t) = \frac{x(t)}{V(t)} = \frac{x(t)}{125} \Rightarrow 0,1 = \frac{x(t)}{125} \Rightarrow x(t) = 12,5 = 25 - 25e^{-\frac{3t}{125}}$$

$$12,5 = 25e^{-\frac{3t}{125}} \Rightarrow -\frac{3t}{125} = \ln\left|\frac{12,5}{25}\right| \Rightarrow t = -\frac{125}{3} \ln\left|\frac{12,5}{25}\right| = 28,8811 \text{ segundos.}$$

IV.3-7 Se sabe que un cierto material radioactivo se desintegra proporcionalmente a la cantidad presente. Si inicialmente hay 50 miligramos de material presente y después de dos horas se observa que el material ha perdido el 10% de su masa original, hallar:

- una expresión para la masa de material presente en un momento t
- la masa después de cuatro horas
- el tiempo para el cual el material se ha desintegrado en la mitad de su masa inicial.

Solución

a) $x(t)$ = miligramos de material en el instante t

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -kx(t) \\ x(0) = 50 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dx}{x(t)} = -kdt \Rightarrow \ln(x(t)) = -kt + C \Rightarrow x(t) = Ce^{-kt}$$

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = 50 \\ x(2) = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 50 = C \\ 45 = Ce^{-2k} \end{array} \right\} \Rightarrow 45 = 50e^{-2k} \Rightarrow -2k = \ln\left|\frac{45}{50}\right| \Rightarrow k = 0,0526803$$

$$x(t) = 50e^{-0,0526803t}$$

b) $x(4) = 50e^{-0,0526803 \cdot 4} = 40,5$ miligramos

c) $x(t) = 25 \Rightarrow 25 = 50e^{-0,0526803t} \Rightarrow e^{-0,0526803t} = 0,5 \Rightarrow t = 13,1576$ horas.

IV.3-8 Se sabe que la población de cierto país aumenta de una forma proporcional al número de habitantes actuales. Si después de dos años la población se ha duplicado y después de tres años la población es de 20.000 habitantes, hallar el número de habitantes que había inicialmente en el país.

Solución

$x(t)$ = población en el instante t

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = kx(t) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dx}{x(t)} = kdt \Rightarrow \ln(x(t)) = kt + C \Rightarrow x(t) = Ce^{kt}$$

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ x(2) = 2x_0 \\ x(3) = 20.000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_0 = C \\ 2x_0 = Ce^{2k} \\ 20.000 = Ce^{3k} \end{array} \right\} \Rightarrow 2 = e^{2k} \Rightarrow 2k = \ln|2| \Rightarrow k = 0,346574$$

$$20.000 = x_0 e^{3 \cdot 0,346574} \Rightarrow x_0 = 7.071,06 \approx 7.071 \text{ habitantes}$$

IV.3-9 Un camarero introduce en un vaso de "cuba-libre" un cubito de hielo de 3 cms de lado. Al cabo de un minuto su lado es de 2,5 cms. Suponiendo que se deshace a un ritmo proporcional al área de su superficie (constante = K), ¿cuánto tardará en deshacerse el cubo de hielo?

Solución

$A(t)$ = área de superficie en el instante t

$V(t)$ = volumen en el instante t

$l(t)$ = lado en el instante t

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dV(t)}{dt} = kA(t) \\ l(0) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} V(t) = (l(t))^3 \Rightarrow \frac{dV(t)}{dt} = 3(l(t))^2 \frac{dl(t)}{dt} \\ A(t) = 6(l(t))^2 \Rightarrow \frac{dA(t)}{dt} = 12(l(t)) \frac{dl(t)}{dt} \end{array} \right\}$$

$$3(l(t))^2 \frac{dl(t)}{dt} = k6(l(t))^2 \Rightarrow \frac{dl(t)}{dt} = 2k \Rightarrow dl(t) = 2kdt \Rightarrow l(t) = 2kt + C$$

$$\left. \begin{array}{l} l(0) = 3 \\ l(1) = 2,5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 = C \\ 2,5 = 2k + C \end{array} \right\} \Rightarrow 2,5 = 2k + 3 \Rightarrow k = -0,25 \Rightarrow l(t) = -0,5t + 3$$

$$l(t) = 0 \Rightarrow 0 = -0,5t + 3 \Rightarrow t = 6 \text{ minutos}$$

IV.3-10 En una explotación ganadera de 1.000 cabezas de ganado se detecta un animal contagiado de un virus. Se supone que la rapidez con la que el virus se propaga es proporcional al producto del nº de animales contagiados y el tiempo transcurrido. Hallar el momento en el cual todos los animales han sido contagiados si se observa que después de 4 días hay 10 animales con el virus.

Solución

$x(t)$ = número de animales contagiados en el instante t

$$x(0) = 1$$

$$x(4) = 10$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = k \cdot x(t) \cdot t \Rightarrow \frac{dx}{x} = kt dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int kt dt$$

$$\ln(x) = k \frac{t^2}{2} + C \Rightarrow x(t) = Ce^{k \frac{t^2}{2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = 1 \\ x(4) = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 = C \\ 10 = Ce^{8k} \end{array} \right\} \Rightarrow 10 = e^{8k} \Rightarrow k = \frac{1}{8} \ln 10 \approx 0,28782 \Rightarrow x(t) = e^{0,14391 t^2}$$

$$x(t) = 1.000 \Rightarrow 1.000 = e^{0,14391 t^2} \Rightarrow 0,14391 \cdot t^2 = \ln(1.000)$$

$$t^2 = \frac{\ln(1.000)}{0,14391} \approx 48 \Rightarrow t = 6,9282 \approx 7 \text{ días.}$$

IV.3-11 En una población de 5.000 habitantes, diez de ellos tienen una enfermedad contagiosa. La velocidad a que se propaga la enfermedad es proporcional al producto de personas contagiadas por las no contagiadas todavía, con una constante de proporcionalidad 0,2. Escribe y resuelve la ecuación diferencial correspondiente. (Modelo de Verhulst o ecuación logística)

Solución

$P(t)$ = población en el instante t

$$P(0) = 10$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dP(t)}{dt} = 0,2 \cdot P(t) \cdot (5000 - P(t)) \\ P(0) = 10 \end{array} \right\}$$

$$\frac{dP(t)}{P(5.000 - P)} = 0,2 \cdot dt \Rightarrow \frac{1}{5.000} (\ln P - \ln(5.000 - P)) = 0,2t + C_1$$

$$\ln \frac{P}{5.000 - P} = 5.000 \cdot 0,2 \cdot t + C_2 \Rightarrow P(t) = \frac{5.000 \cdot e^{1.000t}}{e^{1.000t} + C}$$

$$P(0) = 10 \Rightarrow 10 = \frac{5.000}{1 + C} \Rightarrow 1 + C = 500 \Rightarrow C = 499 \Rightarrow P(t) = \frac{5.000 \cdot e^{1.000t}}{e^{1.000t} + 499}$$

IV.3-12 Al sacar un pastel del horno, su temperatura es de 300 grados F. Tres minutos después, su temperatura es de 200 grados F. ¿Cuánto tiempo tardará en enfriarse hasta una temperatura ambiente de 70 grados F?

Solución

$T(t)$ = temperatura en el instante t

$$T(0) = 300$$

$$T(3) = 200$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = k[M(t) - T(t)] = k[70 - T(t)] \Rightarrow \frac{dT(t)}{70 - T(t)} = k dt$$

$$-\ln(70 - T(t)) = kt + C \Rightarrow 70 - T(t) = Ce^{-kt} \Rightarrow T(t) = 70 + Ce^{-kt}$$

$$\left. \begin{array}{l} T(0) = 300 \\ T(4) = 200 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 300 = 70 + C \\ 200 = 70 + Ce^{-4k} \end{array} \right\} \Rightarrow C = 230 \Rightarrow 130 = 230e^{-4k} \Rightarrow k = 0,142636$$

$$T(t) = 70 + 230e^{-0,142636t}$$

$$T(t) = 70 \Rightarrow 70 = 70 + 230e^{-0,142636t} \Rightarrow 230e^{-0,142636t} = 0, \text{ cuando } t \text{ tienda a infinito.}$$

IV.3-13 Un cuerpo a una temperatura de 50° F se coloca al aire libre donde la temperatura es de 100° F. Si después de 5 minutos la temperatura del cuerpo es de 60° F, encontrar:

- tiempo que tardará en tener la temperatura de 75° F
- la temperatura después de 20 minutos.

Solución

$T(t)$ = temperatura en el instante t



$$T(0) = 50$$

$$T(5) = 60$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = k[M(t) - T(t)] = k[100 - T(t)] \Rightarrow \frac{dT(t)}{100 - T(t)} = k dt$$

$$-\ln(100 - T(t)) = kt + C \Rightarrow 100 - T(t) = Ce^{-kt} \Rightarrow T(t) = 100 + Ce^{-kt}$$

$$\left. \begin{array}{l} T(0) = 50 \\ T(5) = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 50 = 100 + C \\ 60 = 100 + Ce^{-5k} \end{array} \right\} \Rightarrow C = -50 \Rightarrow -40 = -50e^{-5k} \Rightarrow k = 0,0446287$$

$$T(t) = 100 - 50e^{-0,0446287t}$$

$$T(t) = 75 \Rightarrow 75 = 100 - 50e^{-0,0446287t} \Rightarrow 50e^{-0,0446287t} = 25 \Rightarrow t = 15,5314 \text{ minutos.}$$

$$T(20) = 100 - 50e^{-0,0446287*20} = 79,52$$

IV.3-14 Siendo la temperatura del aire de 20°C , se enfría una sustancia desde 100°C hasta 60°C , en 10 minutos. Halla la temperatura después de 40 minutos.

Solución

$T(t)$ = temperatura en el instante t

$$T(0) = 100$$

$$T(10) = 60$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = k[M(t) - T(t)] = k[20 - T(t)] \Rightarrow \frac{dT(t)}{20 - T(t)} = k dt$$

$$-\ln(20 - T(t)) = kt + C \Rightarrow 20 - T(t) = Ce^{-kt} \Rightarrow T(t) = 20 + Ce^{-kt}$$

$$\left. \begin{array}{l} T(0) = 100 \\ T(10) = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 100 = 20 + C \\ 60 = 20 + Ce^{-10k} \end{array} \right\} \Rightarrow C = 80 \Rightarrow 40 = 80e^{-10k} \Rightarrow k = 0,0693147$$

$$T(t) = 20 + 80e^{-0,0693147t}$$

$$T(40) = 20 + 80e^{-0,0693147*40} = 25$$

IV.3-15 Un cuerpo a una temperatura desconocida se pone en un refrigerador a una temperatura constante de 0° F. Si después de 20 minutos la temperatura del cuerpo es 40° F., y después de 40 minutos la temperatura del cuerpo es de 20° F, hallar la temperatura inicial de éste.

Solución

$T(t)$ = temperatura en el instante t

$T(0) = T_0$

$T(20) = 40$

$T(40) = 20$

$$\frac{dT(t)}{dt} = k[M(t) - T(t)] = k[-T(t)] \Rightarrow \frac{dT(t)}{-T(t)} = k dt$$

$$-\ln(T(t)) = kt + C \Rightarrow T(t) = Ce^{-kt}$$

$$\left. \begin{array}{l} T(0) = T_0 \\ T(20) = 40 \\ T(40) = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} T_0 = C \\ 40 = Ce^{-20k} \\ 20 = Ce^{-40k} \end{array} \right\} \Rightarrow 2 = e^{20k} \Rightarrow k = 0,0346574$$

$$C = 40e^{20k} = 80 \Rightarrow T_0 = 80$$

IV.3-16 Un cuerpo de masa 73 Kg. se suelta a una altura de 30,5. Asumiendo que no hay resistencia del aire hallar:

- una expresión para la velocidad del cuerpo en un momento t
- una expresión para la posición del cuerpo en un momento t
- el tiempo requerido por el cuerpo para llegar al suelo.

Solución

$$\left. \begin{array}{l} m \frac{dv}{dt} = mg \\ v(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 9,81 \Rightarrow v(t) = 9,81t + C \xrightarrow{v(0)=0} 0 = C \Rightarrow v(t) = 9,81t$$

$$x(t) = \int 9,81t dt = 9,81 \frac{t^2}{2} + C = 4,905t^2 + C \xrightarrow{x(0)=0} 0 = C \Rightarrow x(t) = 4,905t^2$$

$$x(t) = 30,5 \Rightarrow 30,5 = 4,905t^2 \Rightarrow t^2 = 6,21814 \Rightarrow t = 2,49362$$

- IV.3-17 Un cuerpo de masa m se lanza verticalmente en el aire a una velocidad inicial de v_0 . El cuerpo no encuentra resistencia del aire. Hallar:
- La ecuación del movimiento.
 - Una expresión para la velocidad del cuerpo en un momento t .
 - El momento t_m en el cual llega el cuerpo a su altura máxima.
 - Una expresión para la posición del cuerpo en un momento t .
 - La altura máxima alcanzada por el cuerpo.

Solución

$$\left. \begin{array}{l} m \frac{dv}{dt} = -mg \\ v(0) = v_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -9,81 \Rightarrow v(t) = -9,81t + C$$

$$v(0) = v_0 \Rightarrow v_0 = C \Rightarrow v(t) = -9,81t + v_0$$

$$v(t) = 0 \Rightarrow 0 = -9,81t + v_0 \Rightarrow t_m = \frac{v_0}{9,81}$$

$$x(t) = \int (-9,81t + v_0) dt = -4,905t^2 + v_0t + C$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow 0 = C \Rightarrow x(t) = -4,905t^2 + v_0t$$

$$x(t_m) \Rightarrow x\left(\frac{v_0}{9,81}\right) = -4,905\left(\frac{v_0}{9,81}\right)^2 + v_0\frac{v_0}{9,81} = \frac{(-4,905 + 9,81)}{(9,81)^2}v_0^2 = \frac{4,905}{(9,81)^2}v_0^2$$

- IV.3-18 Un objeto de 4 N de peso se deja caer por su propio peso desde una altura de 1.000 metros. En su trayectoria encuentra una fuerza de rozamiento producida por el viento proporcional a la velocidad que lleva en cada instante, con constante de proporcionalidad igual a 0.05. Encontrar las ecuaciones de la velocidad y la posición para cualquier instante. ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que alcanza una velocidad de 73 m/seg? ¿A qué altura se encuentra del suelo en ese instante? (Considerar la aceleración de la gravedad como $g = 9,81$ m/seg²)

Solución

$$\left. \begin{array}{l} m \frac{dv}{dt} = mg - 0,05v \\ v(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4}{9,81} \frac{dv}{dt} = 4 - 0,05v \Rightarrow \frac{dv}{4 - 0,05v} = 2,4525 dt$$

$$-\frac{1}{0,05} \ln|4 - 0,05v| = 2,4525t + C \Rightarrow \ln|4 - 0,05v| = -0,122625t + C$$

$$4 - 0,05v = C \cdot e^{-0,122625t} \Rightarrow v(t) = 80 + C \cdot e^{-0,122625t} \stackrel{v(0)=0}{\Rightarrow} 0 = 80 + C \Rightarrow C = -80$$

$$v(t) = 80 - 80 \cdot e^{-0,122625t}$$

$$x(t) = \int (80 - 80 \cdot e^{-0,122625t}) dt = 80t + 652,396 \cdot e^{-0,122625t} + C$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow 0 = 652,396 + C \Rightarrow C = -652,396$$

$$x(t) = 80t + 652,396 \cdot e^{-0,122625t} - 652,396$$

$$v(t) = 73 \Rightarrow 73 = 80 - 80 \cdot e^{-0,122625t} \Rightarrow 80 \cdot e^{-0,122625t} = 7 \Rightarrow t = 19,8664 \text{ segundos.}$$

$$x(19,8664) = 994,001 \Rightarrow 1.000 - 994,001 \approx 6 \text{ metros del suelo.}$$

IV.3-19 Un objeto con masa de 100 Kg., inicialmente en reposo, se deja caer al agua desde un barco, y se sumerge. Mientras la gravedad atrae al objeto hacia abajo, una fuerza de boyanza igual a 1/40 del peso del objeto lo empuja hacia arriba (peso = mg). Si se supone que la resistencia del agua ejerce una fuerza sobre el objeto que es proporcional a la velocidad del propio objeto, con constante de proporcionalidad igual a 10 Kg./seg., encontrar la ecuación del movimiento del objeto. ¿Cuántos segundos transcurrirán para que la velocidad del objeto sea de 70 m/seg.?

Solución

$$\left. \begin{array}{l} m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{40} mg - 10v \\ v(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 100 \frac{dv}{dt} = 981 - 24,525 - 10v \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 9,56475 - 0,1v$$

$$\frac{dv}{9,56475 - 0,1v} = dt \Rightarrow -10 \ln|9,56475 - 0,1v| = t + C$$

$$\ln|9,56475 - 0,1v| = -0,1t + C$$

$$9,56475 - 0,1v = Ce^{-0,1t} \Rightarrow v(t) = 95,6475 + C \cdot e^{-0,1t}$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow 0 = 95,6475 + C \Rightarrow C = -95,6475$$

$$v(t) = 95,6475 - 95,6475 \cdot e^{-0,1t}$$

$$v(t) = 70 \Rightarrow 70 = 95,6475 - 95,6475 \cdot e^{-0,1t} \Rightarrow 95,6475 \cdot e^{-0,1t} = 25,6475$$

$$e^{-0,1t} = 0,26815 \Rightarrow -0,1t = \ln(0,26815) = -1,31622 \Rightarrow t = 13,1622 \text{ segundos}$$

IV.3-20 Un vino blanco a temperatura ambiente de 70° F se refrigera en hielo (32° F). Si transcurren 15 minutos para que el vino se enfríe a 60° F, ¿cuánto tiempo transcurrirá para que el vino alcance la temperatura de 56° F?

Solución

$T(t)$ = temperatura en el instante t

$$T(0) = 70$$

$$T(15) = 60$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = k[M(t) - T(t)] = k[32 - T(t)] \Rightarrow \frac{dT(t)}{32 - T(t)} = k dt$$

$$-\ln(32 - T(t)) = kt + C \Rightarrow 32 - T(t) = Ce^{-kt} \Rightarrow T(t) = 32 + Ce^{-kt}$$

$$\left. \begin{array}{l} T(0) = 70 \\ T(15) = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 70 = 32 + C \\ 60 = 32 + Ce^{-15k} \end{array} \right\} \Rightarrow C = 38$$

$$60 = 32 + 38e^{-15k} \Rightarrow \frac{28}{38} = e^{-15k} \Rightarrow k = 0,0203588$$

$$T(t) = 32 + 38e^{-0,0203588t}$$

$$T(t) = 56 \Rightarrow 56 = 32 + 38e^{-0,0203588t} \Rightarrow e^{-0,0203588t} = \frac{24}{38} \Rightarrow t = 22,5717 \text{ minutos.}$$