PRÁCTICA 11: Ecuaciones Diferenciales de primer orden

1. Un cuerpo a una temperatura de 50º F se coloca al aire libre donde la temperatura es de 100º F. Si después de 5 minutos la temperatura del cuerpo es de 60º F, obtener el tiempo que tardará en tener una temperatura de 75º F y la temperatura después de 20 minutos. Utilizad la ley de Newton del enfriamiento que dice que la velocidad a que se enfría una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia y la del aire.

$$\frac{dT}{dt} = k\left[M(t) - T(t)\right] = k\left[100 - T(t)\right] \qquad \begin{array}{l} T(0) = 50 \\ T(5) = 60 \end{array}$$

$$\frac{dT}{100 - T(t)} = kdt \Rightarrow -\ln\left|100 - T(t)\right| = kt + C \Rightarrow 100 - T(t) = Ce^{-kt}$$

$$\Rightarrow T(t) = 100 + Ce^{-kt}$$

$$T(0) = 50 \Rightarrow 50 = 100 + C \Rightarrow C = -50 \Rightarrow T(t) = 100 - 50e^{-kt}$$

$$T(5) = 60 \Rightarrow 60 = 100 - 50e^{-5k} \Rightarrow k = -\frac{1}{5}\ln\left(\frac{4}{5}\right) = 0,044629$$

$$\Rightarrow T(t) = 100 - 50e^{-0,044629t}$$

$$75 = 100 - 50e^{-0,044629t} \Rightarrow t = -\frac{1}{0,044629}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 15,531 \text{ minutos.}$$

$$T(20) = 100 - 50e^{-0,044629\cdot 20} = 79,52^{\circ}\,F$$

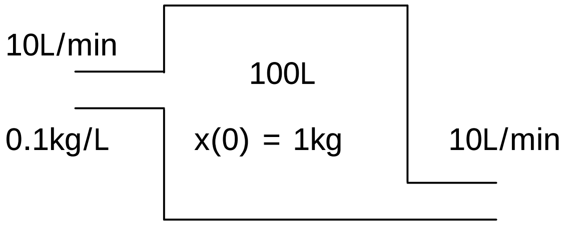
2. Un depósito contiene inicialmente 100 litros de una solución salina que contiene 1 Kg. de sal. Para t = 0, otra solución salina que contiene 0.1 Kg. de sal por litro se agrega al depósito a una velocidad de 10 litros/minuto, mientras una solución bien mezclada sale del depósito a la misma velocidad. Hallar:

a) la cantidad de sal en el depósito en un momento t.

b) la cantidad de sal en el depósito cuando han transcurrido 2 minutos.

x (t) = Kg. de sal dentro del depósito en el instante t

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = 10 \cdot 0.1 - 10\dfrac{x}{100} \\ x(0) = 1 \end{array}\right\}$$



$$\frac{dx}{dt} = \frac{10-x}{10} \Rightarrow \frac{dx}{10-x} = \frac{dt}{10} \Rightarrow -\ln|10-x| = \frac{t}{10} + C$$

$$\ln|10-x| = -\frac{t}{10} + C \Rightarrow 10 - x = Ce^{-t/10} \Rightarrow x(t) = 10 + Ce^{-t/10}$$

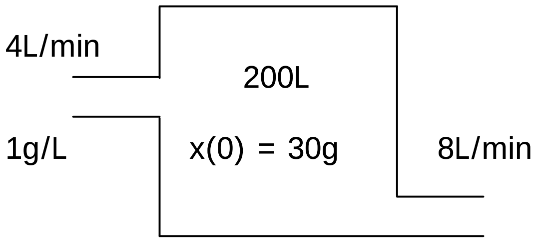
$$x(0) = 1 \Rightarrow 1 = 10 + C \Rightarrow C = -9 \Rightarrow x(t) = 10 - 9e^{-t/10}$$

$x(2) = 10 - 9e^{-2/10} = 10 - 9e^{-0{,}2} = 2{,}63142$ kilogramos de sal

3. Un depósito de salmuera contiene 200 litros de agua en los que hay disueltos 30 gramos de sal, y entran 4 litros por minuto de solución con 1 gramo de sal por litro. La mezcla permanece bien mezclada y sale al exterior con velocidad de 8 litros por minuto. Determinar la ecuación que modeliza el proceso y calcular la cantidad de gramos de sal que hay en el depósito en cualquier instante. ¿Cuándo se vacía el depósito?, ¿en qué instante se alcanza la máxima cantidad de sal en el depósito?, ¿cuál es esa cantidad máxima?

x (t) = Kg. de sal dentro del depósito en el instante t

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = 4\cdot 1 - 8\dfrac{x}{200-4t} \\ x(0) = 30 \end{array}\right\}$$



$$\frac{dx}{dt} = 4 - \frac{2x}{50-t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{2}{50-t}x = 4$$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{50-t}dt} = e^{-2\ln(50-t)} = \frac{1}{(50-t)^2}$$

$$x(t) = (50-t)^2\left[\int \frac{4}{(50-t)^2}dt + C\right] = (50-t)^2\left[\frac{4}{50-t} + C\right] = 4(50-t) + C(50-t)^2$$

$$x(0) = 30 \Rightarrow 30 = 4\cdot 50 + C(50)^2 \Rightarrow 2.500C = 30 - 200 = -170 \Rightarrow C = -0{,}068$$

$$x(t) = 4(50-t) - 0{,}068\cdot(50-t)^2$$

$V(t) = 200 - 4t \Rightarrow 200 - 4t = 0 \Rightarrow t = 50$ minutos

$x'(t) = 0 \Rightarrow -4 + 0{,}136\cdot(50-t) = 0 \Rightarrow 0{,}136\cdot(50-t) = 4 \Rightarrow t = 20{,}5882$
minutos

$x(20{,}5882) = 4(50-20{,}5882) - 0{,}068\cdot(50-20{,}5882)^2 = 58{,}8235$ kilos de sal

Ejercicio 1

$$\text{resolver}\left(T'(t)=k\cdot(100-T(t))\right)$$

$$\rightarrow \left\{\left\{T(t)=\frac{100\cdot e^{k\cdot t}+c}{e^{k\cdot t}}\right\}\right\}$$

$$\text{resolver}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{100\cdot e^{k\cdot 0}+c}{e^{k\cdot 0}}=50\\[2ex] \dfrac{100\cdot e^{k\cdot 5}+c}{e^{k\cdot 5}}=60\end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \{\{c=-50.,k=0.044629\}\}$$

$$\text{resolver}\left(\frac{100\cdot e^{0.044629\cdot t}-50}{e^{0.044629\cdot t}}=75\right) \rightarrow \{\{t=15.531\}\}$$

$$\frac{100\cdot e^{0.044629\cdot 20}-50}{e^{0.044629\cdot 20}} \rightarrow 79.52$$

Ejercicio 2

$$\text{resolver}\left(x'(t)=1-\frac{x(t)}{10}\right) \rightarrow \left\{\left\{x(t)=\frac{10\cdot e^{\frac{t}{10}}+c}{e^{\frac{t}{10}}}\right\}\right\}$$

$$\text{resolver}\left(\frac{10\cdot e^{\frac{0}{10}}+c}{e^{\frac{0}{10}}}=1\right) \rightarrow \{\{c=-9\}\}$$

$$\frac{10\cdot e^{\frac{2}{10}}-9.}{e^{\frac{2}{10}}} \rightarrow 2.6314$$

Ejercicio 3

$$\text{resolver}\left(x'(t)=4-\frac{8\cdot x(t)}{200-4\cdot t}\right)$$

$$\rightarrow \{\{x(t)=c\cdot t^2-100\cdot c\cdot t+2500\cdot c-4\cdot t+200\}\}$$

$$\text{resolver}(c\cdot 0^2-100\cdot c\cdot 0+2500\cdot c-4\cdot 0+200=30.)$$

$$\rightarrow \{\{c=-0.068\}\}$$

$$\text{resolver}(200-4\cdot t=0) \rightarrow \{\{t=50\}\}$$

$$\text{resolver}((-0.068\cdot t^2+100\cdot 0.068\cdot t-2500\cdot 0.068-4\cdot t+200)'=0)$$

$$\rightarrow \{\{t=20.588\}\}$$

$$-0.068\cdot 20.588^2+100\cdot 0.068\cdot 20.588-2500\cdot 0.068-4\cdot 20.588+200$$

$$\rightarrow 58.824$$