PRÁCTICA 12: Ecuaciones Diferenciales de primer orden

PROBLEMA 1

Un cuerpo de masa 2 Kg. se deja caer sin velocidad inicial y encuentra una resistencia del aire que es proporcional (con constante igual a 2) al cociente de la velocidad en cada instante dividida entre el tiempo más uno. Hallar una expresión para la velocidad del cuerpo en un momento t. Calcular cuánto tiempo habrá transcurrido para alcanzar una velocidad de 80 metros por minuto. ¿Qué velocidad llevará al cabo de 20 minutos?

$$\left.\begin{array}{l} m\dfrac{dv(t)}{dt} = mg - 2\dfrac{v(t)}{t+1} \\ v(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\dfrac{dv(t)}{dt} = 2\cdot 9{,}81 - 2\dfrac{v(t)}{t+1} \\ v(0)=0 \end{array}\right\}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = 9{,}81 - \frac{v(t)}{t+1} \Rightarrow \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{t+1}v(t) = 9{,}81$$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{dt}{t+1}} = e^{\ln(t+1)} = t+1 \Rightarrow v(t) = \frac{1}{t+1}\left[\int 9{,}81(t+1)\,dt + C\right]$$

$$v(t) = \frac{1}{t+1}\left[9{,}81\frac{(t+1)^2}{2} + C\right] = 4{,}905(t+1) + \frac{C}{t+1}$$

$$v(0)=0 \Rightarrow 0 = 4{,}905 + C \Rightarrow C = -4{,}905 \Rightarrow v(t) = 4{,}905(t+1) - \frac{4{,}905}{t+1}$$

$$v(t)=80 \Rightarrow 80 = 4{,}905(t+1) - \frac{4{,}905}{t+1} \Rightarrow 16{,}31 = t+1-\frac{1}{t+1}$$

$$16{,}31(t+1) = (t+1)^2 - 1 \Rightarrow 16{,}31t + 16{,}31 = t^2 + 2t \Rightarrow t^2 - 14{,}31t - 16{,}31 = 0$$

$$t = \frac{14{,}31 \pm \sqrt{14{,}31^2 + 4\cdot 1\cdot 16{,}31}}{2} = \frac{14{,}31 \pm 16{,}34}{2} = 15{,}325; -1{,}015$$

$t = 15{,}325$ minutos.

$v(20) = 4{,}905(21) - \dfrac{4{,}905}{21} = 103{,}005 - 0{,}048 = 102{,}96$ metros por minuto

PROBLEMA 2

Se sabe que la población de un determinado país crece a una razón proporcional al número de habitantes que viven actualmente en él. Si después de 10 años la población se ha triplicado y después de 20 años la población es de 150.000 habitantes, hallar el número de habitantes que había inicialmente en dicho país.

Solución

x(t) = número de personas en el instante t
x(0) = x_0
x(10) = 3 x_0
x(20) = 150.000

$$\frac{dx(t)}{dt} = k \cdot x(t) \Rightarrow \frac{dx}{x(t)} = kdt \Rightarrow \int \frac{dx}{x(t)} = \int kdt$$

$$\ln\left(x(t)\right) = kt + C \Rightarrow x(t) = Ce^{kt}$$

$$x(0) = x_0 \Rightarrow x_0 = C$$

$$x(10) = 3x_0 \Rightarrow 3x_0 = Ce^{10k} \Rightarrow 3x_0 = x_0 e^{10k} \Rightarrow 3 = e^{10k} \Rightarrow k = 0{,}109861$$

$$x(20) = 150.000 \Rightarrow 150.000 = x_0 e^{20k} \Rightarrow 150.000 = x_0 e^{2{,}19722}$$

$$x_0 = 16.666{,}7 \approx 16.667 \text{ habitantes}$$

PROBLEMA 1

$$\text{resolver}\left(2\cdot v'(t)=2\cdot 9.81-2\cdot\frac{v(t)}{t+1}\right)$$

$$\rightarrow\left\{\left\{v(t)=\frac{c+4.905\cdot t^{2}+9.81\cdot t}{t+1}\right\}\right\}$$

$$\text{resolver}\left(\frac{c+4.905\cdot 0^{2}+9.81\cdot 0}{0+1}=0\right)\rightarrow\{\{c=0.\}\}$$

$$\text{resolver}\left(\frac{4.905\cdot t^{2}+9.81\cdot t}{t+1}=80\right)$$

$$\rightarrow\{\{t=-1.0611\},\{t=15.371\}\}$$

$$\frac{4.905\cdot 20^{2}+9.81\cdot 20}{20+1}\rightarrow 102.77$$

PROBLEMA 2

$$\text{resolver}(x'(t)=k\cdot x(t))\rightarrow\left\{\left\{x(t)=\frac{c}{e^{-k\cdot t}}\right\}\right\}$$

$$\text{resolver}\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{c}{e^{-k\cdot 0}} \\ 3\cdot x=\dfrac{c}{e^{-k\cdot 10}} \\ 150000=\dfrac{c}{e^{-k\cdot 20}} \end{array}\right.$$

$$\rightarrow\{\{c=16667.,k=0.10986,x=16667.\}\}$$