

ESTABLECER UN MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL PARA ORGANIZAR DE FORMA ÓPTIMA LA PRODUCCIÓN DE UNA EMPRESA AGRARIA CON LAS SIGUIENTES CARACTERÍSTICAS

1. OCUPACIÓN DE LA TIERRA POR LOS CULTIVOS

La superficie de la explotación es de 100 hectáreas de las cuales 90 ha. Pueden ser consideradas como homogéneas (pueden soportar todos los cultivos necesitando los mismos niveles y calidades de factores de producción y dando rendimientos semejantes), mientras que las otras 10 ha. Son únicamente aptas para la pradera permanente. La distribución de los cultivos se da en el cuadro 1.

Cultivos	Vida de los cultivos (meses)	Nº años necesario para que el cultivo pueda volver a la misma parcela	Periodo de ocupación de la tierra (desde la preparación hasta la recolección)														
			E	F	M	A	MY	J	JL	A	S	O	N	D			
Trigo	8,5	1	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←
Colza grano	9,5	2	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←
Colza forrajera	5,5	2	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←
Maíz	6,5	1	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←
Cebada	8,5	1	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←
Pradera permanente	indefinida	-	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←

Cuadro 1

2. ACTIVIDADES ANIMALES

La explotación tiene la posibilidad de poseer un rebaño bovino de las siguientes características:

- Vacas:

- Periodos de parto: concentrados en otoño
- Tasa de fecundidad: 94%
- Número de lactaciones: 6
- Renuevo del rebaño: Auto-reemplazo o compra de vacas
- Edad en el primer parto: 24 meses
- Modalidad de cubrición: Inseminación artificial

- Otras características del rebaño: los animales, no destinados a vacas lecheras, pueden ser vendidos a 8 días o cebados en la explotación hasta los 24 meses. Se puede estimar que habrá una pérdida del 2% en los animales de 0 a 12 meses guardados en la explotación.

Indicación: Considerar las siguientes actividades:

- Número de vacas
- Número de terneros
- Número de terneras
- Número de becerros
- Número de becerras
- Venta de terneros lechales
- Venta de terneras lechales
- Venta de becerras
- Compra de vacas para reemplazo
- Número de vacas a reemplazar

La definición de las actividades y el establecimiento de las relaciones entre ellas puede hacerse a partir de los gráficos 2 y 3. El gráfico 2, construido a partir del gráfico 1, nos permite situar (en edad) en todo momento del año a cada una de las actividades animales que se desarrollan en la explotación durante un cierto periodo (en este caso un año). El gráfico 3 presenta las características zootécnicas del rebaño, las posibilidades de compra y venta y las relaciones entre los diferentes tipos de animales.

Año/mes	E	F	M	A	MY	J	JL	A	S	O	N	D
1											N	
2												
3	C										P	
4	C										P	
5	C										P	
6	C										P	
7	C										P	
8	C										P	
9	C										R	

N= Nacimiento C= cubrición P=parto R=reemplazo

Gráfico 1

Actividad	Edad (meses) al principio de la actividad	Edad (meses) al final de la actividad
Terneros/as	0	12
Becerras/as	12	24
Vacas	24	-

Gráfico 2

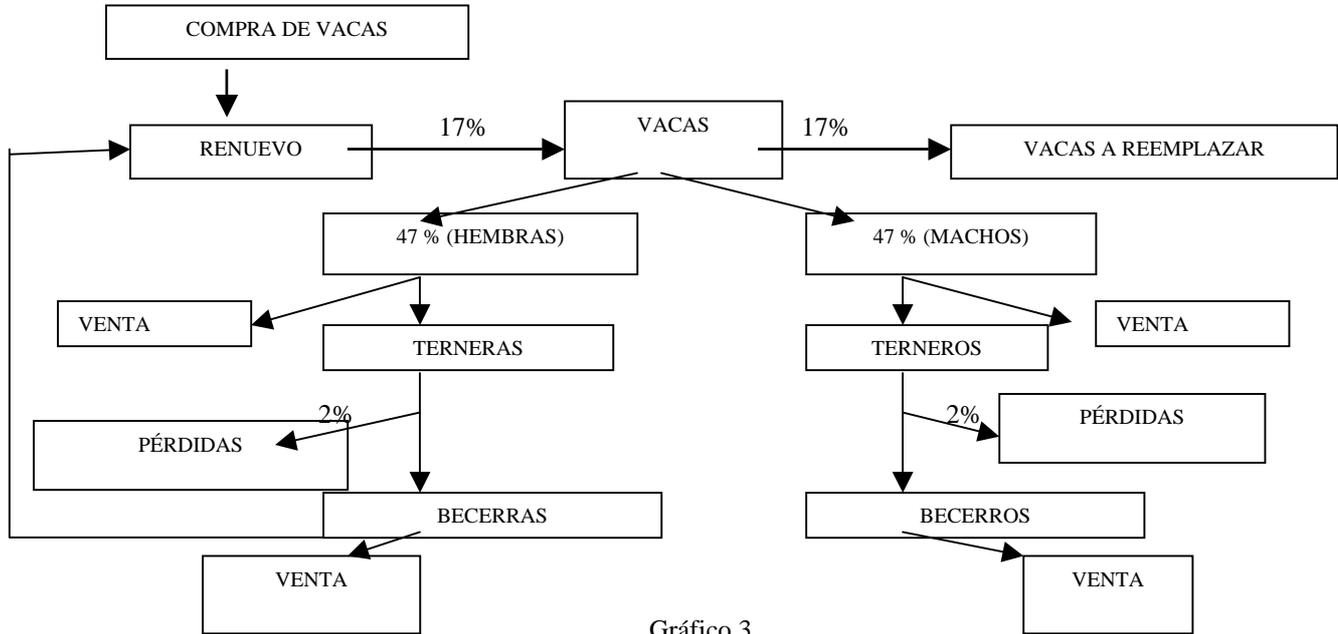


Gráfico 3

3. RESTRICCIONES DE TRABAJO

El trabajo disponible en la explotación es de un hombre a tiempo completo. Las disponibilidades en horas por mes y por trabajador en la región son las siguientes:

Mes	E	F	M	A	MY	J	JL	A	S	O	N	D
Horas / hombre	160	160	200	225	220	225	250	250	225	225	184	184

Por otra parte, está previsto que en mayo y junio se podrá contratar mano de obra temporal en cantidad ilimitada, pudiendo realizar la totalidad de los trabajos de la explotación. Las necesidades de mano de obra por hectárea de cultivo se dan en el cuadro 2. Las necesidades de trabajo en horas por animal y por día son las expuestas en el cuadro 3.

Cultivo/mes	E	F	M	A	MY	J	JL	A	S	O	N	D
Pradera permanente	1,25		0,5					0,5				
Trigo /Cebada		0,5		0,5			6				6,75	
Colza grano			0,2	0,5		6			3,25			
Colza forrajera	7	7							3,25			7
Maíz				7,75			0,5			1	1	

Cuadro 2

Animal(*)/mes	E	F	M	A	MY	J	JL	A	S	O	N	D
Vaca	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
Ternero/a	3	1,4	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	3	3	3
Becerro/a	1,8	1,4	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	1,8	0,9	1,4	1,8

Cuadro 3 (*)Se hace la hipótesis de que el tiempo de trabajo necesario por animal es el siguiente:
 por vaca: 0,5 horas/día
 por animal de 0 a 4 meses: 0,1 horas/día
 por animal de 4 a 24 meses: 0,06 horas/día en estabulación y 0,03 en pastoreo

El trabajo suplementario en ciertos periodos especiales (partos, por ejemplo) se supone que será proporcionado por el cónyuge del jefe de la explotación sin añadir gastos.

4. FUNCIÓN ECONÓMICA

Utilizaremos como función económica el margen bruto de la explotación. Los coeficientes a asociar a cada actividad se dan en el cuadro 4.

Actividad	Coeficiente en unidades monetarias	Contenido del coeficiente
Trigo	1720	Margen bruto de la ha de trigo
Colza grano	2579	Margen bruto de la ha de colza grano
Colza forrajera	900	Coste de la ha de colza forrajera
Maíz	1013	Coste de la ha de maíz
Cebada	900	Coste de la ha de cebada
Pradera permanente	450	Coste de la pradera permanente
Vacas	2700	Margen bruto por vaca y año
Terneros	250	Coste de un ternero(alimentación del ternero lechal incluida)
Terneras	250	Coste de una ternera(alimentación de la ternera lechal incluida)
Becerro	2300	Margen bruto por becerro de 24 meses
Becerra	30	Coste de la becerra
Venta de ternero lechal	400	Precio de venta del ternero lechal a 8 días
Venta de ternera lechal	400	Precio de venta del ternera lechal a 8 días
Venta de becerras	3000	Precio de venta de una becerra de 24 meses
Compra de vacas para reemplazo	3000	Precio de compra de una vaca para reemplazo
Vacas reemplazadas	1600	Precio de venta de una vaca a reemplazar
Trabajo temporero mayo	6	Coste de la hora de trabajo
Trabajo temporero en junio	6	Coste de la hora de trabajo

Cuadro 4

SOLUCIÓN

Las variables de decisión del modelo de Programación Lineal representan cada una de las actividades a realizar (cuadro 4), según las correspondientes unidades. Consideraremos las siguientes 18 variables:

X ₁	nº de ha de trigo
X ₂	nº de ha de colza grano
X ₃	nº de ha de colza forrajera
X ₄	nº de ha de maíz
X ₅	nº de ha de cebada
X ₆	nº de ha de pradera permanente
X ₇	nº de vacas
X ₈	nº de terneros
X ₉	nº de terneras
X ₁₀	nº de becerro
X ₁₁	nº de becerra
X ₁₂	venta de ternero lechal
X ₁₃	venta de ternera lechal
X ₁₄	venta de becerras
X ₁₅	compra de vacas para reemplazo
X ₁₆	vacas reemplazadas
X ₁₇	nº de horas de trabajo temporal en mayo
X ₁₈	nº de horas de trabajo temporal en junio

Función objetivo

$$\text{Maximizar } 1720x_1 + 2579x_2 - 900x_3 - 1013x_4 - 900x_5 - 450x_6 + 2700x_7 - 250x_8 - 250x_9 + 2300x_{10} - 30x_{11} + 400x_{12} + 400x_{13} + 3000x_{14} - 3000x_{15} + 1600x_{16} - 6x_{17} - 6x_{18}$$

Restricciones correspondientes a los periodos de ocupación de la tierra

Según el cuadro 1 y, si consideramos un año, hay 7 periodos de ocupación de la tierra que dan lugar a otras tantas restricciones para que no se supere la superficie total disponible en cada periodo:

Restricción	Periodo	Hectáreas disponibles
R1	1 enero - 15 febrero	$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 \leq 100$
R2	15 febrero - 15 abril	$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 \leq 100$
R3	15 abril - 30 junio	$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 100$
R4	30 junio - 31 julio	$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 100$
R5	31 julio - 31 agosto	$x_4 + x_6 \leq 100$
R6	1 septiembre - 15 noviembre	$x_2 + x_3 + x_4 + x_6 \leq 100$
R7	15 noviembre - 31 diciembre	$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 \leq 100$

Observaciones:

- Nótese que las restricciones R1 y R7 coinciden. Realmente, si la planificación la hacemos para más de un año, esos dos periodos se reducen a uno solo: 15 de noviembre - 15 de febrero. En consecuencia, puesto que son la misma restricción, una de las dos puede eliminarse; eliminamos R7.
- La restricción R1 es más restrictiva que R2 porque tiene tantos términos como ésta y además un sumando más (+ x_3). Por tanto podemos eliminar la restricción R2.
- La restricción R3 es más restrictiva que R4 y R4 es, a su vez, más restrictiva que R5. Podemos eliminar R4 y R5. Teniendo en cuenta estas observaciones, las restricciones resultantes son:

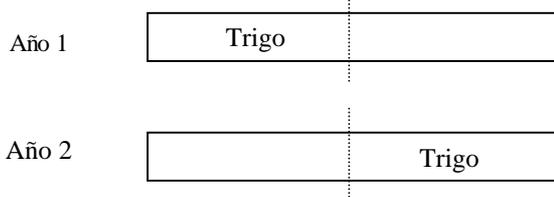
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 \leq 100$$

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 100$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_6 \leq 100$$

Restricciones de frecuencia

Por ejemplo, la regla de frecuencia del trigo :



Para que el trigo pueda cultivarse al mismo nivel (nº de hectáreas) cada año, respetando la regla de frecuencia será necesario que este cultivo no supere más del 50% de la superficie total de la explotación.

Teniendo en cuenta que se va a cultivar una parte siempre de pradera permanente (x_6), la inecuación a que da lugar es:

$$x_1 \leq \frac{1}{2} \text{ de superficie de la explotación}$$

esto es:

$$x_1 \leq \frac{1}{2} (100 - x_6)$$

o bien

$$x_1 + 0.5x_6 \leq 50$$

Para el maíz y la cebada tendremos la misma regla de frecuencia:

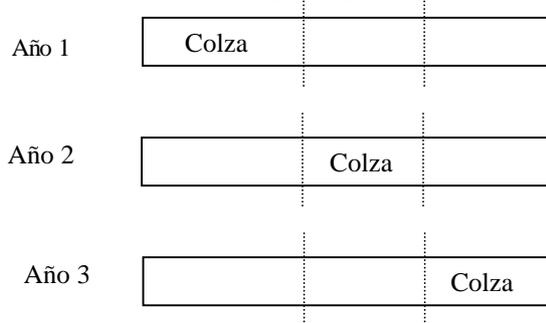
$$x_4 + 0.5x_6 \leq 50$$

$$x_5 + 0.5x_6 \leq 50$$

Ahora bien, como interesará que el trigo, la cebada y el maíz no sigan sobre una misma parcela, estas tres restricciones deberán ser consideradas a un tiempo y sustituirse por la restricción:

$$x_1 + x_4 + x_5 + 0.5x_6 \leq 50$$

Para la colza la frecuencia es 2 años, luego el gráfico será:



Y esto tanto para la colza grano como para la forrajera. Esto es:

$$x_2 \leq \frac{1}{3}(100 - x_6) \Rightarrow x_2 + \frac{1}{3}x_6 \leq \frac{100}{3}$$

$$x_3 \leq \frac{1}{3}(100 - x_6) \Rightarrow x_3 + \frac{1}{3}x_6 \leq \frac{100}{3}$$

Y teniendo en cuenta las dos a un tiempo, como antes:

$$x_2 + x_3 + \frac{1}{3}x_6 \leq \frac{100}{3}$$

Otras restricciones de ocupación de la tierra

Hemos de tener en cuenta que, según se dice, solo 10 hectáreas son aptas para la pradera permanente, luego

$$x_6 \geq 10$$

Esto es, la pradera permanente debe ocupar como mínimo 10 hectáreas, ya que no son aptas para otro tipo de cultivo.

Restricciones entre las actividades animales por su definición. Restricciones de equilibrio del rebaño

Restricciones que ponen en relación las vacas con los terneros y terneras:

El número de terneras lechales (y el de terneros lechales) obtenidos de las vacas debe ser mayor o igual que el número de terneras (y terneros) guardados en la explotación más el número de terneras (y terneros) vendidos.

$$\frac{47}{100}x_7 \geq x_8 + x_{12}$$

$$\frac{47}{100}x_7 \geq x_9 + x_{13}$$

Es necesario asegurar el equilibrio entre las terneras (y terneros) y las becerras (y becerros):

$$x_8 \geq x_{10} + \frac{2}{100}x_{10} \Rightarrow x_8 \geq \frac{102}{100}x_{10}$$

$$x_9 \geq x_{11} + \frac{2}{100}x_{11} \Rightarrow x_9 \geq \frac{102}{100}x_{11}$$

El número de vacas compradas para renovación del rebaño más las becerras guardadas en la explotación debe ser mayor o igual al número de becerras necesarias para reemplazo más el número de becerras vendidas.

$$x_{15} + x_{11} \geq \frac{17}{100}x_7 + x_{14}$$

Las vacas reemplazadas no deben superar las necesidades de reemplazo:

$$x_{16} \geq \frac{17}{100}x_7$$

Restricciones de trabajo

Debemos formular las restricciones que expresen, en cada mes, que las necesidades de trabajo de los cultivos y de los animales deben ser menores o iguales a las disponibilidades.

Enero:	$7x_3 + 1.25x_6 + 15x_7 + 3x_8 + 3x_9 + 1.8x_{10} + 1.8x_{11} \leq 160$
Febrero:	$0.5x_1 + 7x_3 + 0.5x_5 + 15x_7 + 1.4x_8 + 1.4x_9 + 1.4x_{10} + 1.4x_{11} \leq 160$
Marzo:	$0.2x_2 + 0.5x_6 + 15x_7 + 0.9x_8 + 0.9x_9 + 0.9x_{10} + 0.9x_{11} \leq 200$
Abril:	$0.5x_1 + 0.5x_2 + 7.75x_4 + 0.5x_5 + 15x_7 + 0.9x_8 + 0.9x_9 + 0.9x_{10} + 0.9x_{11} \leq 225$
Mayo:	$15x_7 + 0.9x_8 + 0.9x_9 + 0.9x_{10} + 0.9x_{11} \leq 220 + x_{17}$
Junio:	$6x_2 + 15x_7 + 0.9x_8 + 0.9x_9 + 0.9x_{10} + 0.9x_{11} \leq 225 + x_{18}$
Julio:	$6x_1 + 0.5x_4 + 6x_5 + 15x_7 + 0.9x_8 + 0.9x_9 + 0.9x_{10} + 0.9x_{11} \leq 250$
Agosto:	$0.5x_6 + 15x_7 + 0.9x_8 + 0.9x_9 + 0.9x_{10} + 0.9x_{11} \leq 250$
Septiembre:	$3.25x_2 + 3.25x_3 + 15x_7 + 0.9x_8 + 0.9x_9 + 1.8x_{10} + 1.8x_{11} \leq 225$
Octubre:	$x_4 + 15x_7 + 3x_8 + 3x_9 + 0.9x_{10} + 0.9x_{11} \leq 225$
Noviembre:	$6.75x_1 + x_4 + 6.75x_5 + 15x_7 + 3x_8 + 3x_9 + 1.4x_{10} + 1.4x_{11} \leq 184$
Diciembre:	$7x_3 + 15x_7 + 3x_8 + 3x_9 + 1.8x_{10} + 1.8x_{11} \leq 184$

Restricciones de no negatividad

$$x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, 18$$

Planteamiento completo

Maximizar $z = 1720x_1 + 2579x_2 - 900x_3 - 1013x_4 - 900x_5 - 450x_6 + 2700x_7 - 250x_8 - 250x_9 + 2300x_{10} - 30x_{11} + 400x_{12} + 400x_{13} + 3000x_{14} - 3000x_{15} + 1600x_{16} - 6x_{17} - 6x_{18}$

Sujeto a :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 \leq 100$$

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 100$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_6 \leq 100$$

$$x_1 + x_4 + x_5 + 0.5x_6 \leq 50$$

$$x_2 + x_3 + \frac{1}{3}x_6 \leq \frac{100}{3}$$

$$x_6 \geq 10$$

$$\frac{47}{100}x_7 - x_8 - x_{12} \geq 0$$

$$\frac{47}{100}x_7 - x_9 - x_{13} \geq 0$$

$$x_8 - \frac{102}{100}x_{10} \geq 0$$

$$x_9 - \frac{102}{100}x_{11} \geq 0$$

$$\frac{17}{100}x_7 - x_{11} + x_{14} - x_{15} \leq 0$$

$$\frac{17}{100}x_7 - x_{16} \geq 0$$

$$7x_3 + 1.25x_6 + 15x_7 + 3x_8 + 3x_9 + 1.8x_{10} + 1.8x_{11} \leq 160$$

$$0.5x_1 + 7x_3 + 0.5x_5 + 15x_7 + 1.4x_8 + 1.4x_9 + 1.4x_{10} + 1.4x_{11} \leq 160$$

$$0.2x_2 + 0.5x_6 + 15x_7 + 0.9x_8 + 0.9x_9 + 0.9x_{10} + 0.9x_{11} \leq 200$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 + 7.75x_4 + 0.5x_5 + 15x_7 + 0.9x_8 + 0.9x_9 + 0.9x_{10} + 0.9x_{11} \leq 225$$

$$15x_7 + 0.9x_8 + 0.9x_9 + 0.9x_{10} + 0.9x_{11} - x_{17} \leq 220$$

$$6x_2 + 15x_7 + 0.9x_8 + 0.9x_9 + 0.9x_{10} + 0.9x_{11} - x_{18} \leq 225$$

$$6x_1 + 0.5x_4 + 6x_5 + 15x_7 + 0.9x_8 + 0.9x_9 + 0.9x_{10} + 0.9x_{11} \leq 250$$

$$0.5x_6 + 15x_7 + 0.9x_8 + 0.9x_9 + 0.9x_{10} + 0.9x_{11} \leq 250$$

$$3.25x_2 + 3.25x_3 + 15x_7 + 0.9x_8 + 0.9x_9 + 1.8x_{10} + 1.8x_{11} \leq 225$$

$$x_4 + 15x_7 + 3x_8 + 3x_9 + 0.9x_{10} + 0.9x_{11} \leq 225$$

$$6.75x_1 + x_4 + 6.75x_5 + 15x_7 + 3x_8 + 3x_9 + 1.4x_{10} + 1.4x_{11} \leq 184$$

$$7x_3 + 15x_7 + 3x_8 + 3x_9 + 1.8x_{10} + 1.8x_{11} \leq 184$$

$$x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, 18$$

La solución que se obtiene es $x^*_1=27.25926$, $x^*_2=30$, $x^*_6=10$, $z^*=119755.9$