Ejercicios resueltos

V.4-1 Resolver gráficamente el siguiente modelo de Programación Lineal:

Maximizar $f(x,y) = 2x - y$
Sujeto a:

$$2x + 3y \le 6$$

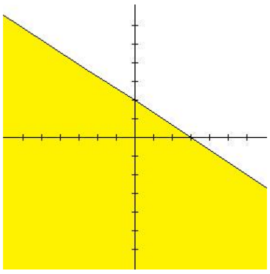
$$x - y \ge 0$$

$$x, y \ge 0$$

Solución

Representamos primero 2x + 3y ≤ 6, dibujando la recta 2x + 3y = 6. Damos valores:

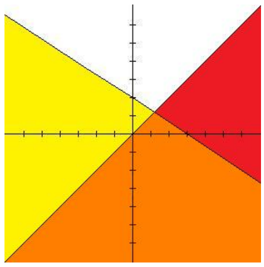
x	y
0	2
3	0



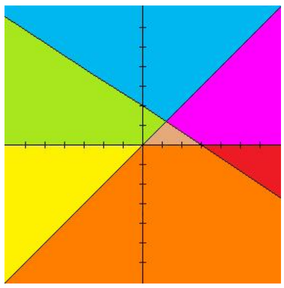
Probamos con (0,0): 2·0+3·0 = 0 < 6
Por lo que obtenemos la zona coloreada.

Hacemos lo mismo para representar x-y ≥ 0. Representamos x – y = 0

x	y
0	0
1	1



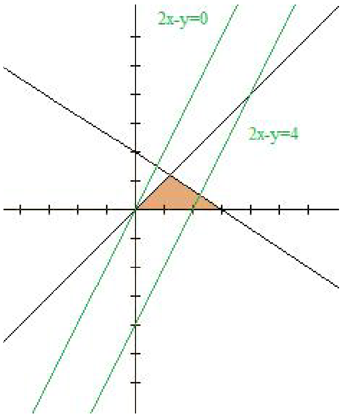
Con (0,0) no podem os probar porque es tá en la pr opia recta, por lo que probamos con (1,0) 1-0 = 1>0. Obteniendo la nueva zona coloreada.



Por último representamos y ≥ 0
La región R se corresponde con la zona coloreada de marrón.

Para hallar el máximo y el mínimo dibujamos dos niveles de la función 2x-y, para comprobar el sentido de avance de la función, por ejemplo 2x-y = 0; 2x-y = 4.

Comprobamos que el valor de la región donde la función alcanza el máximo es el punto (3,0) y donde alcanza el mínimo es el punto (0,0)



V.4-2 Una distribuidora de café realiza dos tipos de mezclas, la primera contiene un 50% de café natural y 50% de café torrefacto, la segunda contiene tres partes de café natural por cada parte de café torrefacto. Se abastece diariamente con 1.000 Kg. de café torrefacto y 1.300 Kg. de café natural. Si el beneficio por cada kilo de la primera mezcla es de 1€ y por cada kilo de la segunda mezcla es de 0,9€, ¿cuántos kilos de cada mezcla debe fabricar para maximizar el beneficio?

Solución

x = número de kilogramos que debe fabricar de la primera mezcla
y = número de kilogramos que debe fabricar de la segunda mezcla

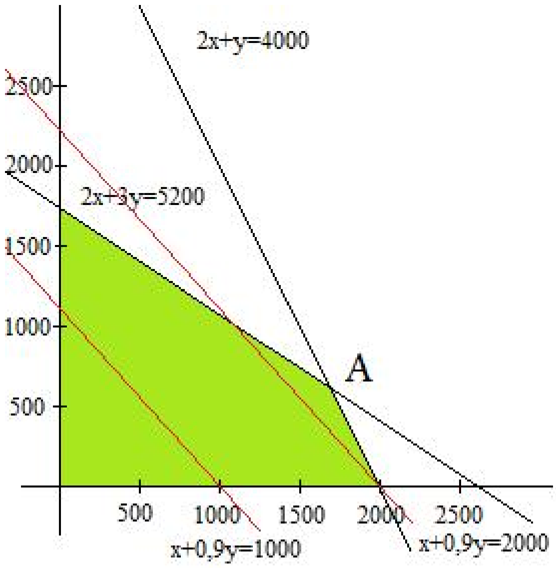
Maximizar $f(x,y) = x + 0,9y$

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y \le 5.200 \\ 2x + y \le 4.000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

Representamos la región factible y dibujamos dos niveles de la función objetivo para averiguar su sentido de avance, por ejemplo:

x + 0,9y = 1.000
x + 0,9y = 2.000



Con lo que comprobamos el sentido de avance de la función objetivo, viendo que el máximo se alcanza en el punto A. Para calcularlo resolvemos el sistema de ecuaciones que forman las rectas que determinan el punto.

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 5.200 \\ 2x + y &= 4.000 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2y = 1.200 \Rightarrow y = 600 \Rightarrow x = 1.700$$

Por lo que deben fabricar 1.700 Kg. de la primera mezcla y 600 Kg. de la segunda mezcla, para un beneficio máximo de 1.700 + 0,9·600 = 2.240€

V.4-3 Una empresa comercializa dos tipos de compuestos alimenticios para animales. El primero contiene 4 unidades del nutriente A y 2 unidades del nutriente B, el segundo contiene 2 unidades del nutriente A y 3 unidades del nutriente B. Se quiere conseguir una dieta que proporcione como mínimo 20 unidades de A y 18 unidades de B. Si el coste de una unidad del primer compuesto es de 2€ y del segundo es de 2,5€, calcular qué cantidad de cada tipo de compuesto hay que tomar para un coste mínimo.

Solución

x = unidades del primer compuesto
y = unidades del segundo compuesto

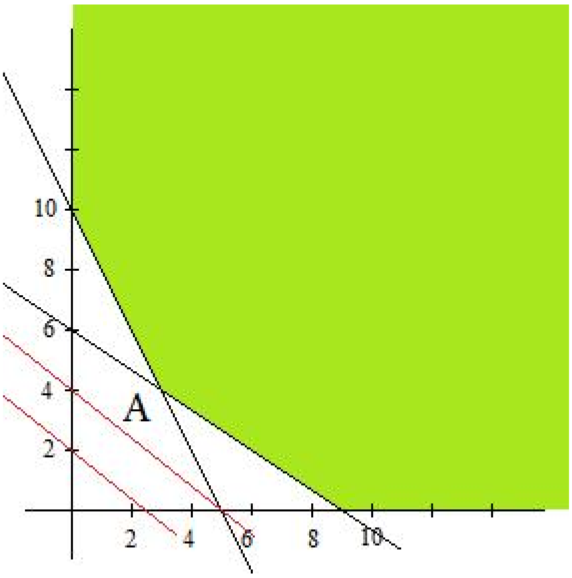
Minimizar $f(x,y) = 2x + 2,5y$

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 2y \geq 20 \\ 2x + 3y \geq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Representamos la región factible y dibujamos dos niveles de la función objetivo para averiguar su sentido de avance, por ejemplo:

2x + 2,5y = 5
2x + 2,5y = 10



Con lo que comprobamos el sentido de avance de la función objetivo, viendo que el mínimo se alcanza en el punto A.

Para calcularlo resolvemos el sistema de ecuaciones que forman las rectas que determinan el punto:

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 2y = 20 \\ 2x + 3y = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x + 2y = 20 \\ 4x + 6y = 36 \end{array}\right\} \Rightarrow 4y = 16 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = 3$$

Por lo que debe tomar 3 unidades del primer compuesto y 4 unidades del segundo compuesto.

V.4-4 Un comerciante dispone de 200 jamones y 300 botellas de vino con los que realizar dos tipos de lotes navideños. El lote tipo A consta de dos jamones y dos botellas de vino y el lote tipo B consta de 1 jamón y 3 botellas de vino. Si el beneficio por cada lote A es de 30€ y por cada lote B de 15€, ¿cuántos lotes de cada tipo debe preparar para conseguir un beneficio máximo?

Solución

x = Número de lotes tipo A
y = Número de lotes tipo B

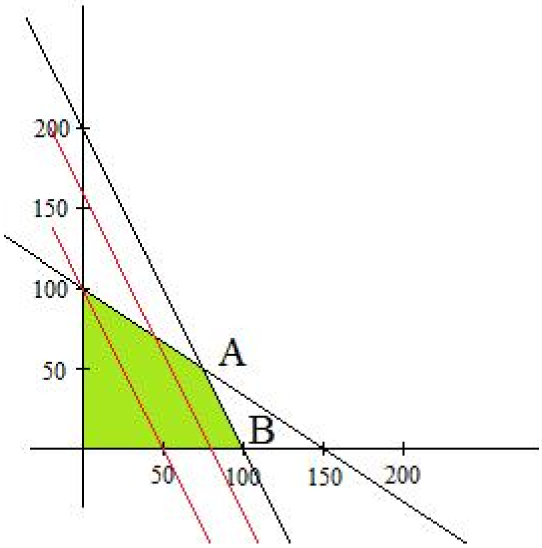
Maximizar $f(x, y) = 30x + 15y$

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y \leq 200 \\ 2x + 3y \leq 300 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Representamos la región factible y dibujamos dos niveles de la función objetivo para averiguar su sentido de avance, por ejemplo:

30x + 15y = 1.500
30x + 15y = 2.400



Con lo que comprobamos el sentido de avance de la función objetivo, viendo que parece que la función objetivo es paralela a una de las restricciones.

Para comprobarlo, observamos que los coeficientes de las variables en la restricción 2x + y = 200 y en la función objetivo f(x, y) = 30x + 15y son proporcionales. Por lo que el máximo se alcanza en cualquier valor del segmento AB de la recta 2x + y = 200.

Para calcular A resolvemos el sistema de ecuaciones que forman las rectas que lo determinan.

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 200 \\ 2x + 3y &= 300 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2y = 100 \Rightarrow y = 50 \Rightarrow x = 75$$

Por lo que obtendrá el beneficio máximo siempre que prepare entre 75 y 100 lotes tipo A y el resto tipo B.

V.4-5 En una granja agrícola se desea criar conejos y pollos como complemento en su economía, de forma que no se superen en conjunto las 180 horas mensuales destinadas a esta actividad. Su almacén sólo puede albergar un máximo de 1000 kilogramos de pienso. Si se supone que un conejo necesita 20 kilogramos de pienso al mes y un pollo 10 kilogramos al mes, que las horas mensuales de cuidados requeridos por un conejo son 3 y por un pollo son 2 y que los beneficios que reportaría su venta ascienden a 500 y 300 unidades monetarias por cabeza respectivamente, hallar el número de animales que deben criarse para que el beneficio sea máximo.

Solución

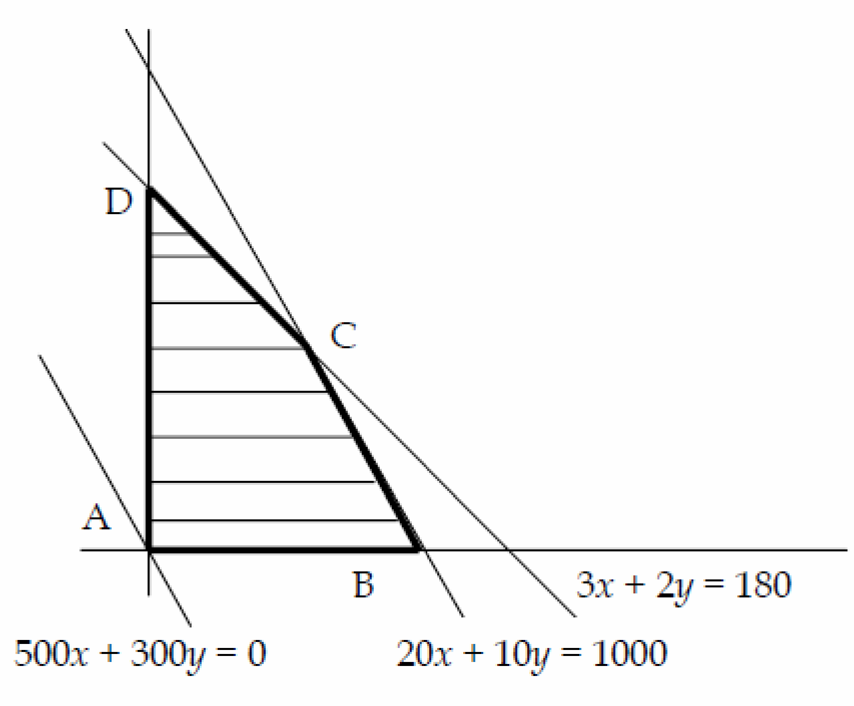
x = número de conejos
y = número de pollos

Maximizar $f(x, y) = 500x + 300y$

Sujeto a:

$$\left.\begin{aligned} &20x + 10y \le 1.000 \\ &3x + 2y \le 180 \\ &x, y \ge 0 \end{aligned}\right\}$$

Representamos la región factible y dibujamos el nivel cuando la función objetivo es igual a cero para averiguar su sentido de avance:



Con lo que comprobamos el sentido de avance de la función objetivo, viendo que el máximo se alcanza en el punto C. Podemos llegar a la misma conclusión obteniendo todos los vértices y comparando el valor que toma la función objetivo en cada uno de ellos.

$$\left.\begin{aligned} 20x + 10y &= 1.000 \\ 3x + 2y &= 180 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 4x + 2y &= 200 \\ 3x + 2y &= 180 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 20 \Rightarrow y = 60$$

$$A\,(0,0) \Rightarrow f\,(0,0) = 0$$

$$B\,(50,0) \Rightarrow f\,(50,0) = 25.000$$

$$C\,(20,60) \Rightarrow f\,(20,60) = 10.000 + 18.000 = 28.000$$

$$D\,(0,90) \Rightarrow f\,(0,90) = 27.000$$

Por lo que deben criarse 20 conejos y 60 pollos para que el beneficio sea máximo con valor de 28.000 unidades monetarias.

V.4-6 Sobre dos alimentos diferentes tenemos la siguiente información por kilogramo:

Alimento	Calorías	Proteínas (gr.)	Precio (u.m.)
A	1.000	25	60
B	2.000	100	210

Hallar el coste mínimo de una dieta formada sólo por este tipo de alimentos y que al menos aporte 3.000 calorías y 100 gramos de proteínas.

Solución

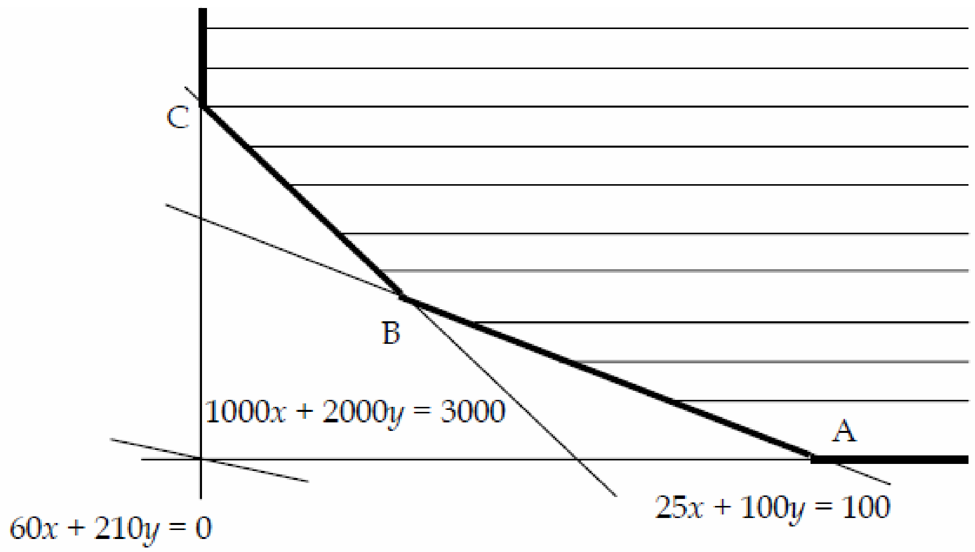
x = kilogramos de alimento A
y = kilogramos de alimento B

Minimizar $f(x, y) = 60x + 210y$

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} 1.000x + 2.000y \geq 3.000 \\ 25x + 100y \geq 100 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Representamos la región factible y dibujamos el nivel cuando la función objetivo es igual a cero para averiguar su sentido de avance:



Con lo que comprobamos el sentido de avance de la función objetivo, viendo que el mínimo se alcanza en el punto B. Podemos llegar a la misma conclusión obteniendo todos los vértices y comparando el valor que toma la función objetivo en cada uno de ellos.

$$\left.\begin{array}{l} 1.000x + 2.000y = 3.000 \\ 25x + 100y = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ x + 4y = 4 \end{array}\right\}$$

$$2y = 1 \Rightarrow y = 0.5 \Rightarrow x = 2$$

$$A\,(4,0) \Rightarrow f\,(4,0) = 240$$

$$B\,(2,0.5) \Rightarrow f\,(2,0.5) = 2 \cdot 60 + 0.5 \cdot 210 = 120 + 105 = 225$$

$$C\,(0,1.5) \Rightarrow f\,(0,1.5) = 210 \cdot 1.5 = 315$$

Por lo que deben consumirse 2 kilos del alimento A y medio del B, con un coste mínimo de 225 unidades monetarias.

Notamos que al movernos por los ejes de coordenadas que limitan la región de factibilidad, la función objetivo crece hacia infinito, por lo que en dichos puntos no puede alcanzarse el mínimo buscado.