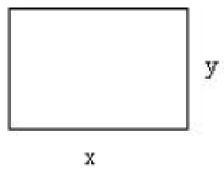
PROBLEMA 1:

En un concurso se da a cada participante un alambre de dos metros de longitud para que doblándolo convenientemente hagan con el mismo un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos. Aquellos que lo logren reciben como premio tantos euros como decímetros cuadrados tenga de superficie el cuadrilátero construido. Calcula razonadamente la cuantía del máximo premio que se pueda obtener en este concurso.

El máximo premio se obtiene cuando el cuadrilátero tiene superficie máxima. Se trata, pues, de obtener el rectángulo de máxima superficie y de perímetro 2 metros.



$S = xy$

$P = 2x + 2y = 2 \Rightarrow y = 1 - x$

$S = x(1 - x) = x - x^2$

$S' = 1 - 2x \Rightarrow 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$S'' = -2 < 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ máximo

El óptimo es el cuadrado de lado 0.5 metros. En este caso, la superficie, y por tanto el premio, será:

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25m^2 = 25dm^2$$

Por tanto, el premio es de 25 euros.

PROBLEMA 2:

La edad de un padre es doble de la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos), la edad del padre era triple que la suma de las edades, en aquel tiempo, de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, la suma de edades de las tres personas será 150 años. ¿Qué edad tenía el padre en el momento de nacer sus hijos?

x = edad del padre hoy
y = edad del hijo mayor hoy
z = edad del hijo menor hoy

$$\left.\begin{array}{r} x = 2\cdot(y+z) \\ x-(y-z) = 3\cdot\big(y-(y-z)+z-(y-z)\big) \\ x+(y+z)+y+(y+z)+z+(y+z) = 150 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x-2y-2z=0 \\ x+2y-8z=0 \\ x+4y+4z=150 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -8 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 150 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & \vdots & 0 \\ 1 & 2 & -8 & \vdots & 0 \\ 1 & 4 & 4 & \vdots & 150 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 4 & -6 & \vdots & 0 \\ 0 & 6 & 6 & \vdots & 150 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3/6]{F_2/2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 25 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 25 \\ 0 & 2 & -3 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-2F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 25 \\ 0 & 0 & -5 & \vdots & -50 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} x-2y-2z=0 \\ y+z=25 \\ -5z=-50 \end{array}\right\} \Rightarrow z=10 \Rightarrow y=15 \Rightarrow x=50$$

PROBLEMA 3:

Una empresa, que comercializa el producto *A*, recientemente ha efectuado una gran campaña publicitaria para promocionar este artículo. Sea $V(t)$ la variable, función del tiempo, que expresa el ritmo de ventas. Antes de la campaña el ritmo de ventas era $V_a = 10.000$ unidades/día. Al final de la campaña ($t = 0$), $V(t)$ alcanza su valor máximo, situándose en 50.000 unidades/día. A partir de ese momento se observa que $V(t)$ disminuye, de forma que su variación instantánea es proporcional al exceso de $V(t)$ sobre V_a, siendo $k = -0.01$ la constante de proporcionalidad. Se pide:

a. Determinar cuantos días han de transcurrir, desde el final de la campaña, para que el ritmo de ventas $V(t)$, sea de 30.000 unidades/día

b. Representar gráficamente la trayectoria temporal del ritmo de ventas para el primer año

c. ¿Cuál es el valor mínimo de unidades/día?, ¿en cuánto tiempo ocurrirá?

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dV}{dt} = -0.01\left[V(t) - 10.000\right] \\ V(0) = 50.000 \end{array}\right\}$$

$$\frac{dV}{V(t) - 10.000} = -0.01dt \Rightarrow \ln\left|V(t) - 10.000\right| = -0.01t + C$$

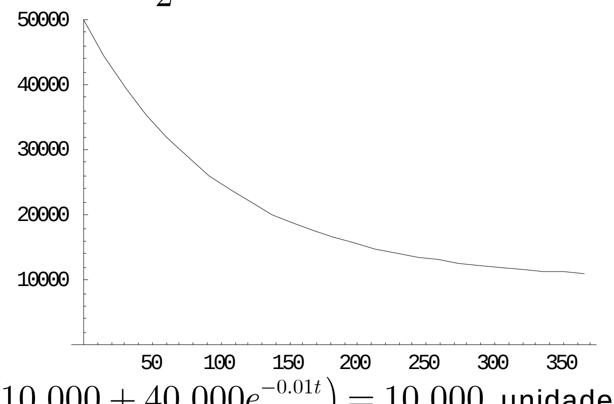
$$V(t) - 10.000 = Ce^{-0.01t} \Rightarrow V(t) = 10.000 + Ce^{-0.01t}$$

$$V(0) = 50.000 \Rightarrow 10.000 + C = 50.000 \Rightarrow C = 40.000$$

$$V(t) = 10.000 + 40.000e^{-0.01t}$$

$$V(t) = 30.000\,? \Rightarrow 10.000 + 40.000e^{-0.01t} = 30.000 \Rightarrow 1 + 4e^{-0.01t} = 3$$

$$e^{-0.01t} = \frac{1}{2} \Rightarrow -0.01t = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow t = 69,314 \text{ días}$$



$$\lim_{t\to\infty} V(t) = \lim_{t\to\infty}\left(10.000 + 40.000e^{-0.01t}\right) = 10.000 \text{ unidades al día}$$

PROBLEMA 4:

Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autobuses de 40 plazas y 10 de 50 plazas, pero sólo dispone de 9 conductores. El alquiler de un autocar grande cuesta 800 € y el de uno pequeño 600 €. Calcular cuántos autobuses de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible para la escuela.

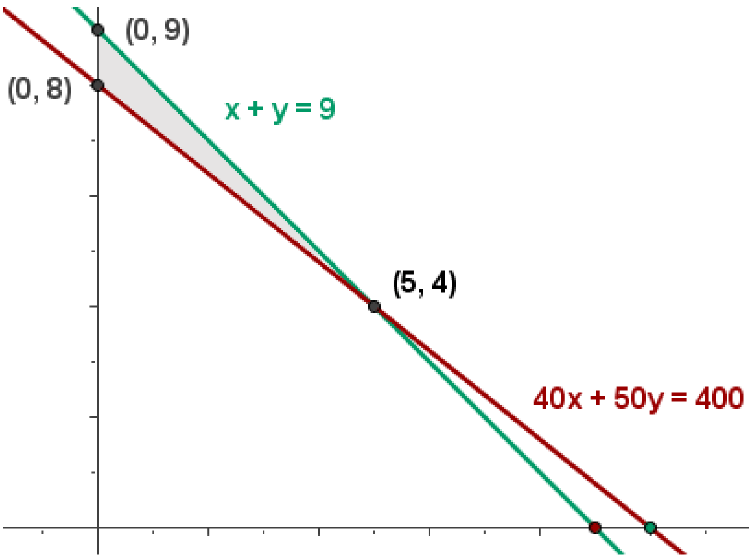
Resolver el problema de Programación Lineal que resulta aplicando el método gráfico.

x = nº autobuses de 40 plazas
y = nº autobuses de 50 plazas

minimizar $f(x,y) = 600x + 800y$

sujeto a:

$$40x + 50y \geq 400$$
$$x + y \leq 9$$
$$x, y \geq 0$$



$$\left.\begin{array}{l} 4x + 5y = 40 \\ x + y = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 4 \end{array}$$

$f(0,9) = 7.200$ euros
$f(0,8) = 6.400$ euros
$f(5,4) = 6.200$ euros

El coste mínimo es de 6.200 € y se consigue con 5 autobuses pequeños y 4 autobuses grandes

PROBLEMA 5:

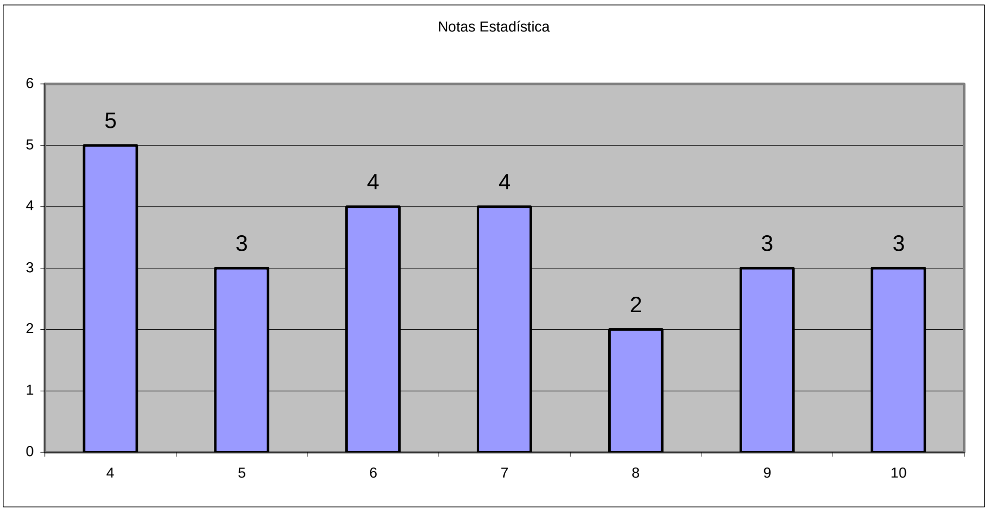
En la siguiente tabla se presentan 24 datos correspondientes a las puntuaciones obtenidas en un examen final de Estadística:

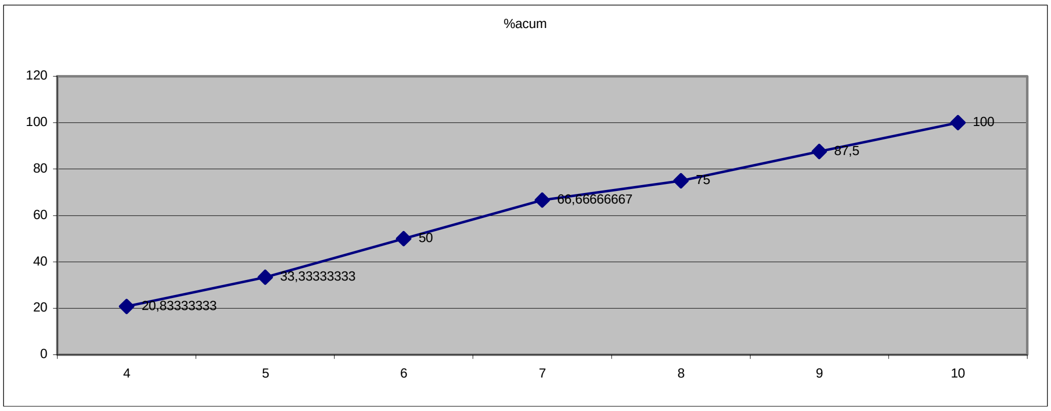
2,5	6	7	5,25	3	9,5	4	7,5	7	4,5	8,5	10
5,5	8,5	6	6,5	8	5	3,25	9,5	2,75	9	7	5

a. Realizad la tabla de frecuencias completa para la variable "puntuación del examen de Estadística" (tomad 7 intervalos).

xi	abso	acum	f	F	%	%acum
4	5	5	0,2083333	0,20833	20,83333	20,83333
5	3	8	0,125	0,33333	12,5	33,33333
6	4	12	0,1666667	0,5	16,66667	50
7	4	16	0,1666667	0,66667	16,66667	66,66667
8	2	18	0,0833333	0,75	8,333333	75
9	3	21	0,125	0,875	12,5	87,5
10	3	24	0,125	1	12,5	100
	24		1		100	

b. Dibujad el histograma (diagrama de barras) y el polígono de porcentajes acumulados.





c. Obtened la media, varianza, desviación típica, mediana y moda.

$$\overline{x} = \frac{2,5 + 2,75 + 3 + 3,25 + 4 + 4,5 + 5 \cdot 2 + 5,25 + 5,5}{24} +$$
$$+ \frac{6 \cdot 2 + 6,5 + 7 \cdot 3 + 7,5 + 8 + 8,5 \cdot 2 + 9 + 9,5 \cdot 2 + 10}{24} = \frac{150,75}{24} = 6,28125$$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 n_i}{N-1} = \frac{118,0390625}{23} = 5,13213 \Rightarrow s = 2,26542$$

$$Me = \frac{6 + 6,5}{2} = 6,25$$

Moda = 7

d. Señalar en el gráfico anterior el decil segundo y el percentil 65 explicando su significado.

Decil segundo = 4,3 (el 20% de las notas están por debajo de 4,3)

Percentil 65 = 7 (el 65% de las notas están por debajo de 7)