Examen parcial segundo

1. Considera el sistema lineal de coeficientes reales $\begin{cases} x+y+z &= a \\ -x-y-2z &= b \\ -x-y &= c \end{cases}$. Decide cuál de las siguientes afirmaciones es cierta y cuál es falsa; razona tu decisión.
   a) El sistema siempre es compatible.
   b) El sistema es incompatible si $a>0$, $b>0$ y $c>0$.
   c) El sistema es compatible determinado para $a\le 0$.

(1 punto)

2. ¿Cuáles de los siguientes sistemas de vectores son bases del espacio vectorial de las soluciones del sistema homogéneo $\begin{cases} 2x+y-2z+t=0 \\ -x+3y-z+4t=0 \end{cases}$? Razona tu respuesta.
   a) $\{(0,7,1,-5),(1,-9,0,7)\}$; b) $\{(0,7,1,-5),(0,-14,-2,10)\}$; c) $\{(0,7,1,-5)\}$.

(1 punto)

3. En el espacio formado por las funciones periódicas, de período 2 segundos, y continuas a trozos con el producto escalar $f\bullet g=\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$, se considera el sistema ortogonal $\mathcal{S}=\{1,\cos(\pi t),\sin(\pi t),\cos(2\pi t),\sin(2\pi t)\}$. Para la función $I(t)=t$, $t\in(-1,1]$, se pide:
   a) Dibuja la onda básica $I(t)=t$, $t\in(-1,1]$, y su extensión periódica al intervalo $(-1,5]$.
   b) ¿Cuál es la norma de $I(t)$?
   c) ¿Cuál es la proyección de $I(t)$ sobre el espacio generado por los vectores $c_1(t)=\cos(\pi t)$ y $s_1(t)=\sin(\pi t)$ (es decir, el primer armónico de $I(t)$)?, ¿y la proyección de $I(t)$ sobre el espacio generado por los vectores $c_2(t)=\cos(2\pi t)$ y $s_2(t)=\sin(2\pi t)$ (es decir, el segundo armónico de $I(t)$)? Dibuja conjuntamente ambos armónicos en $(-1,1]$ de modo que se distinga cual es la curva que representa a cada uno de ellos.
   d) Obtén el polinomio de Fourier de orden dos de $I(t)$, es decir, la proyección de $I(t)$ sobre el subespacio generado por los vectores de $\mathcal{S}$. Dibuja el gráfico de barras de las amplitudes de los armónicos calculados.

(2.5 puntos)

4. a) Calcula $\int_0^{+\infty} 50 e^{-st} dt$, que es la transformada de Laplace de $v(t) = 50$.

   b) Considera un circuito en serie RL, con $R = 5\,\Omega$ y $L = 2.5\,H$. En $t = 0$, cuando la intensidad del circuito es 2 amperios, se aplica una fuente de $v(t) = 50$ voltios. El modelo matemático que describe la intensidad del circuito $i(t)$ en el dominio del tiempo es $L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i(t) = v(t)$. Calcula $i(t)$ usando la transformada de Laplace.

(2.5 puntos)

5. El volumen V de un cilindro depende del radio r y de la altura h del siguiente modo: $V(r,h) = \pi r^2 h$. Decide razonadamente si la función $V(r,h)$ es diferenciable.

   Supongamos que partimos de $r = 2$ dm. y $h = 0.5$ dm, se pide:

   a) Obtén y dibuja en el plano de eje horizontal r y eje vertical h la ecuación de los puntos que dan el mismo volumen que los datos de partida.

   b) ¿A qué velocidad cambia el volumen al variar sólo el radio?, ¿y al variar sólo la altura? ¿A qué es más sensible el volumen a la variación del radio o a la de la altura?, ¿por qué?

   c) Completa la aproximación lineal de ΔV para pequeños incrementos de los datos de partida:

   $$\Delta V \approx \ldots\ldots\ldots \Delta r + \ldots\ldots\ldots \Delta h$$

   d) ¿En qué dirección del plano de eje horizontal r y eje vertical h se alcanza la máxima velocidad de cambio del volumen V?, ¿cuál es esa velocidad máxima? Dibuja esta dirección en el mismo gráfico que has hecho en a).

   e) Si $\Delta r = 0.01$ dm, ¿cuánto debería incrementarse h para conseguir la dirección de máxima velocidad de crecimiento del volumen?

   f) ¿En qué dirección es 200 dm^3/dm la velocidad de cambio del volumen?, ¿por qué?

(3 puntos)

En todos los ejercicios propuestos se valorará positivamente:

- La claridad y el orden en el proceso de resolución.
- Una explicación escueta de los pasos dados para resolverlos.