Examen parcial segundo

1. a) Explica la estructura de las soluciones de un sistema lineal no homogéneo $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ compatible.

   b) Escribe una matriz $A \in \mathcal{M}_{4\times3}$ (cuatro filas y tres columnas) cuyo espacio columna esté generado por los vectores $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-4\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\-3\end{pmatrix}$.

   - ¿Qué vectores forman el espacio nulo de A?
   - Calcula *todos* los vectores (x,y,z) tal que $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ resulte $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-4\end{pmatrix}$.

(2 puntos)

2. Considera el espacio $\mathbf{R}^3$, con el producto escalar estándar.

   a) Comprueba que $\mathrm{B}=\left\{\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}, \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}, \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}\right\}$ es un sistema ortogonal de $\mathbf{R}^3$.

   b) Escribe las razones que permiten afirmar que el sistema B es una base de $\mathbf{R}^3$.

   c) Averigua las coordenadas del vector $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}12\\-6\\6\end{pmatrix}$ respecto a la base B.

   d) ¿Cuál es la distancia del vector $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}12\\-6\\6\end{pmatrix}$ al plano $5x+4y+z=0$?

(2.5 puntos)

3. a) Obtén la transformada de Laplace de $v(t)=50\,e^{-100t}$. Explica cómo la calculas.

   b) En el circuito en serie RL, con $R=10\,\Omega$ y $L=0.2\,H.$, por el que inicialmente no circula corriente se aplica un potencial exponencial $v(t)=50\,e^{-100t}$ cuando se cierra el interruptor en $t=0$. La ecuación que verifica $i(t)$ en el dominio del tiempo es $L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i(t) = v(t)$. Calcula $i(t)$ usando la transformada de Laplace.

(2.5 puntos)

4. Considera la montaña de altitud $z = 9 - x - y^2$.
   a) Dibuja las curvas de nivel 0, 3, 6 y 9. ¿Cómo se llaman las curvas que has dibujado?
   b) ¿Cuál de las anteriores curvas de nivel pasa por el punto de coordenadas $(2,1)$? Calcula y dibuja el vector gradiente $\vec{\nabla} z(2,1)$ junto a la curva de nivel del punto $(2,1)$.
   c) ¿Cuál es la dirección $\vec{U}$ del camino de máxima pendiente de ascenso a partir del punto $(2,1,6)$ de la montaña? Indica otra dirección de ascenso desde $(2,1,6)$.
   d) ¿Cuál es la ecuación del plano tangente a la montaña en $(2,1,6)$?
   Escribe la ecuación de la recta que pasa por $(2,1,6)$ y sigue la dirección de $\vec{U}$. ¿Está esa recta en el plano tangente?, ¿por qué?
   e) ¿En qué dirección debe comenzar a caminar una persona a partir del punto $(2,1,6)$ de la montaña para no variar la altitud?

(3 puntos)

En todos los ejercicios propuestos se valorará positivamente:
- La claridad y el orden en el proceso de resolución.
- Una explicación escueta de los pasos dados para resolverlos.