Examen parcial segundo

1. Considera los sistemas lineales $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

   a) Comprueba que las soluciones del correspondiente sistema homogéneo forman una recta de $\mathbf{R}^3$ que pasa por el origen y halla las ecuaciones paramétricas de esa recta.

   b) Comprueba que el espacio columna de la matriz A es un plano de $\mathbf{R}^3$ que pasa por el origen y halla su ecuación general.

   c) ¿Es compatible el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$?

   d) ¿Está el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ en el espacio columna de A?, ¿por qué?

(2.5 puntos)

2. En el espacio formado por la funciones continuas a trozos en el intervalo $[-1,1]$ consideramos el producto escalar $f \bullet g = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$.

   a) Comprueba que $f(x)=1$ y $g(x)=x$ son ortogonales. ¿Cuál es la norma de cada una de estas funciones?

   b) Averigua cuál es la norma de la suma $h(x)=1+x$, sin calcular integrales. Explícalo.

   c) Proyecta la función $p(x)=x^2$ sobre $f(x)=1$ y sobre $g(x)=x$. ¿Cuál es el polinomio de grado menor o igual que 1 más próximo a $p(x)=x^2$?

(2 puntos)

3. a) Calcula la integral $\int_0^{+\infty} e^{-st}.250\cos(2t)\,dt$ usando que

$$\int e^{at}.\cos(bt)\,dt = \frac{e^{at}}{a^2+b^2}\left(a\cdot\cos(bt)+b\cdot\sin(bt)\right)+C$$

b) El circuito en serie RC, con $R = 40\,\Omega$ y $C = 25\times 10^{-3}\,F$, se conecta en $t = 0$ a una fuente de tensión sinusoidal $v(t) = 250\cos(2t)$. Sabiendo que la carga inicial del condensador es de $q_0 = 1.25$ culombios y que $i(t)$ verifica, en el dominio temporal, la ecuación $R\cdot i(t) + \frac{1}{C}\left[q_0 + \int_0^t i(u)du\right] = v(t)$, calcula $i(t)$ usando la transformada de Laplace.

(2.5 puntos)

4. Una de las raíces de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ es $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$.

a) Calcula y dibuja el dominio de $x(b,c) = \frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$.

b) Escribe y dibuja la ecuación que verifican los pares de valores (b,c) que producen como solución $x = 2$. Comprueba que $(b = 1, c = -6)$ es un punto de esa curva.

c) Calcula las derivadas parciales primeras de $x(b,c)$. Demuestra que $x(b,c)$ es diferenciable en $b = 1$ y $c = -6$, escribe las componentes del vector gradiente $\overrightarrow{\nabla x(1,-6)}$ y dibuja su posición respecto a la curva de nivel.

d) ¿La raíz $x(1,-6) = 2$ es más sensible a los cambios en b o a los cambios en c?, es decir, ¿la velocidad de cambio de x en $(1,-6)$ es mayor al variar b o al variar c?

e) ¿En qué proporción debería disminuir b y aumentar c a partir de $(1,-6)$ para que la raíz $x(1,-6) = 2$ no cambie?

(3 puntos)

En todos los ejercicios propuestos se valorará positivamente:

- La claridad y el orden en el proceso de resolución.
- Una explicación escueta de los pasos dados para resolverlos.