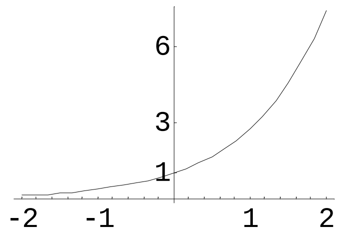
# PRÁCTICA 1: LAS FUNCIONES EXPONENCIALES

## 1. Información básica

### ■ La función exponencial creciente

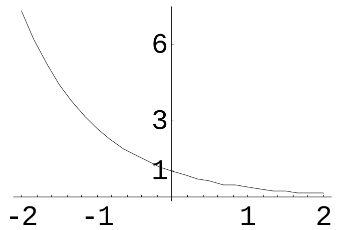
En primer lugar, recordemos que $f(x) = a^x$ indica la función exponencial de base el número $a$, constante positiva, y cuyo exponente $x$ es la variable independiente. Así pues, son funciones exponenciales $2^x$ o $10^x$ y especialmente la más importante de todas, la de base el número $e$: $f(x) = e^x$, llamada exponencial natural.




Las funciones exponenciales del tipo $e^{kx}$ son crecientes cuando $k$ es un número real positivo.

### ■ La función exponencial decreciente

Las funciones exponenciales decrecientes son de la forma $e^{-kt}$, donde $k$ es un número positivo, y, en general, lo son las del tipo $e^{-kt} + B$.

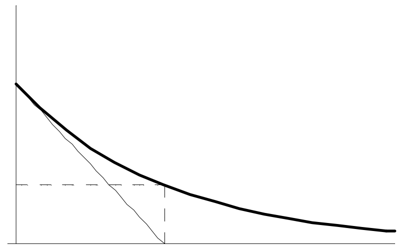



En las siguientes líneas se pide que, sin usar el ordenador, trabajes para conocer el significado de las constantes o parámetros de la función exponencial decreciente $f(t) = Ae^{-kt} + B$:

1) *Significado de la constante $k$ de la función $f(t) = e^{-kt}$.*

Comprueba que el valor $\tau = \dfrac{1}{k}$, recíproco de la constante $k$, es el instante en el que la función $f(t) = e^{-kt}$ se reduce a $e^{-1} \approx 0.368$. El valor de $\tau = \dfrac{1}{k}$ se conoce como la *constante de tiempo*.

— Demuestra que la tangente a la curva $f(t) = e^{-kt}$ en $t = 0$ corta al eje horizontal en $t = \tau$.
Como ayuda te proporcionamos la gráfica de al lado, en la que conviene que determines el significado de todas las líneas y puntos.



— Calcula la derivada de $f(t) = Ae^{-kt}$, ¿a qué velocidad cambia $f(t) = Ae^{-kt}$?, ¿esa velocidad de cambio es proporcional al valor de la función en cada instante?

2) *Significado de las constantes $A$ y $B$ de la función $f(t) = Ae^{-kt} + B$:*

$$\text{Valor inicial } = f(0) = A + B; \qquad \text{Valor "final"} = \lim_{x \to +\infty} f(x) = f(+\infty) = B.$$

## 2. Ejercicios

### ■ Realiza los siguientes ejercicios sobre funciones de tipo exponencial

**Ejercicio 1 (Un caso práctico de crecimiento exponencial):** El mundo de la Economía proporciona un ejemplo de crecimiento exponencial, se trata del capital acumulado al depositar un capital inicial a un interés compuesto continuo: *Si se deposita un capital de $A$ euros en un banco que paga un interés anual del $r\%$, compuesto continuamente, entonces después de $t$ años el capital acumulado $C$ es $C(t) = Ae^{\frac{r}{100}t} = Ae^{kt}$.*

Por ejemplo, si has depositado un capital de un millón de euros en un banco que paga un interés anual del 5%, compuesto continuamente, entonces tu capital acumulado al cabo de $t$ años es $C(t) = 1e^{\frac{5}{100}t} = e^{0.05t}$ millones de euros. Se pide:

a) Representa la función $C(t) = e^{0.05\,t}$ del capital acumulado para los $30$ primeros años, ¿crece el capital acumulado conforme pasa el tiempo?

b) ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse tu capital inicial de un millón de euros? Escribe su valor de forma exacta y calcula un valor aproximado.

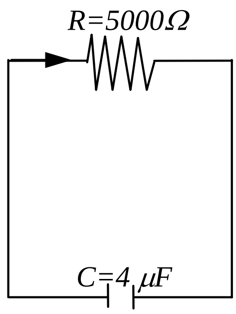
c) La velocidad de cambio de $C(t)$ es proporcional al capital acumulado $C(t)$, ¿cuál es el factor de proporcionalidad?

**Ejercicio 2:** Calcula una función de tensión $v(t)$ que disminuya exponencialmente desde 5 voltios, en el instante $t=0$, hacia un estado estacionario de 1 voltio y cuya constante de tiempo sean 3 segundos. Dibuja la función $v(t)$ obtenida e identifica en la gráfica la constante de tiempo, el voltaje en ese instante (calcula su valor) y el estado estacionario de tensión.

### ■ Funciones de tipo exponencial aplicadas a circuitos eléctricos

**Los circuitos eléctricos RC y RL**: En un circuito simple del tipo RC o RL la tensión y la intensidad son exponenciales de la forma $Ae^{-kt}+B$ siempre que el circuito se deje libre o bien se conecte a una fuente de corriente continua.

- La constante de tiempo del circuito con condensador es $\tau = RC$ y la del circuito con bobina es $\tau = \dfrac{R}{L}$.
- Las constantes $A$ y $B$ las determina la condición inicial del circuito y el voltaje de la corriente continua aplicada.




**Ejercicio 3 (un circuito RC)**: Un condensador de capacidad $C = 4\,\mu F$, con una tensión inicial de 2 voltios, se conecta a una resistencia de $R = 5000$ ohmios.

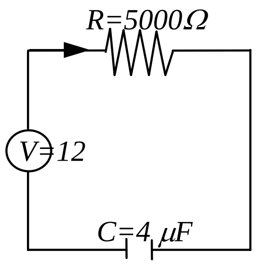
Si el circuito se deja *libre*, entonces *el condensador se descarga* de tal forma que la tensión viene dada por $\boxed{v(t) = v_0\, e^{-\frac{1}{RC}t} = 2\,e^{-50\,t}}$. Se pide:

*a)* Dibuja la función $v(t) = 2\,e^{-50t}$ (cuidado: es muy importante elegir un dominio de tiempo adecuado), ¿crece o decrece?

*b)* ¿Cuál es la constante de tiempo de $v(t) = 2\,e^{-50t}$?, ¿cuántos segundos es necesario que transcurran hasta que la tensión en el condensador sea de $2\times 0.368 = 0.736$ voltios?

*c)* ¿A qué tiende $v(t)$ cuando crece $t$? (es decir, ¿cuál es el estado estacionario?).

**Ejercicio 4 (un circuito RC)**: Si se aplica al circuito RC del ejercicio 6 una tensión constante de $V=12$ voltios, entonces la tensión en el condensador a lo largo del tiempo viene dada por $v(t)=V+(v_0-V)e^{-\frac{1}{RC}t}=12-10\,e^{-50t}$. Se pide:



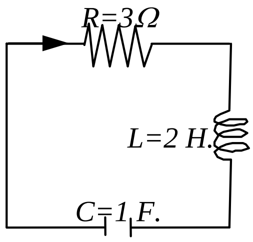

a) Dibuja la función $\boxed{v(t)=12-10\,e^{-50t}}$ (no olvides que es muy importante elegir un dominio de tiempo adecuado), ¿crece o decrece?

b) ¿Cuál es la constante de tiempo de $v(t)=12-10\,e^{-50t}$?, ¿cuántos segundos es necesario que transcurran hasta que la tensión en el condensador sea de $12-10\times 0.368=8.32$ voltios?

c) ¿A qué tiende $v(t)$ cuando crece $t$?, es decir, ¿cuál es el estado estacionario de $v(t)$ ?

d) Indica cuál de los dos sumandos de $v(t)=12-10\,e^{-50t}$ es la parte estacionaria y cuál la parte transitoria del voltaje del condensador.

**Algunos circuitos RLC**.




**Ejercicio 5:** La corriente eléctrica circula libremente (es decir, no hay una fuente externa de tensión) por un circuito que está formado por una resistencia de $R=3$ ohmios, una bobina de $L=2$ henrios y un condensador de $C=1$ faradio. La intensidad $i(t)$ del circuito varía a lo largo del tiempo (en segundos), siguiendo la ley $i(t)=-4e^{-t}+6e^{-t/2}$.

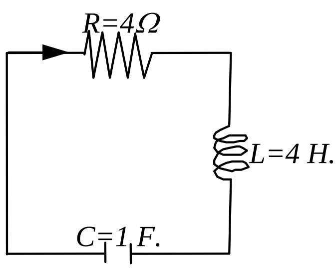
Se pide:

a) ¿Cuál es la intensidad inicial del circuito? Completa la siguiente tabla con los valores (redondea a la segunda cifra decimal) de la intensidad que faltan:

| $t$, segundos | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $i(t)$, amperios | | | | | | |

b) Dibuja la función intensidad en los 10 primeros segundos. Observa la gráfica para hallar aproximadamente su valor máximo y el instante en el que se alcanza.

*c)* Calcula la intensidad al cabo de 2 minutos. Determina $\lim_{t\to+\infty} i(t)$.




**Ejercicio 6:** Sabiendo que $i(t)=t\,e^{-t/2}$ es la intensidad en un circuito, no sometido a ninguna excitación, con $R=4$ ohmios, $L=4$ henrios y $C=1$ faradio.

a) Halla los valores $i(0)$ e $i'(0)$.

b) Dibuja conjuntamente la gráfica de esta función $i(t)=t\,e^{-t/2}$ y la de la función constante $\frac{1}{e}$ .

c) ¿A partir de qué instante aproximadamente la intensidad es menor que $\frac{1}{e}$?

# PRÁCTICA 1: LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS. LA CATENARIA

## 1. Información básica

Las funciones hiperbólicas son combinaciones de exponenciales.

Se llaman *coseno hiperbólico* y *seno hiperbólico* de un número real $x$ a:

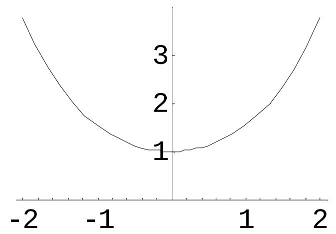
$$y = \cosh x = Cosh[x] = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}, \qquad y = \sinh x = Sinh[x] = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}.$$

La función coseno hiperbólico es el modelo adecuado para describir la forma que adopta una cadena flexible suspendida entre dos puntos y que cuelga bajo la acción de su propio peso. Ese es el caso de los cables de telégrafos, del hilo de tender, de una cadena colgante, etc.

La curva $y(x)$ que describe una cadena colgante se conoce como catenaria, del latín «catena»; esta función es consecuencia del estado de equilibrio de la cadena bajo la acción de distintas fuerzas y su expresión analítica es

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2a}\left(e^{ax} + e^{-ax}\right) = \frac{1}{a}\cosh\left(ax\right)},$$

donde $a = \dfrac{w}{T_0}$ es el cociente entre la densidad constante $w$ de la cadena y la tensión horizontal $T_0$ en el punto más bajo de la misma.




Las funciones hiperbólicas satisfacen relaciones similares a las trigonométricas. Consulta las tablas y resúmenes de teoría entregados en clase para conocerlas.

## 2. Ejercicios

**Ejercicio 7:** Representa conjuntamente las funciones $Cosh[x]$, $\frac{1}{2}e^x$ y $\frac{1}{2}e^{-x}$. Puedes escribir y ejecutar la siguiente orden del programa *Mathematica*:

```
Plot[{Cosh[x], 1/2 E^x, 1/2 E^-x}, {x, -2, 2}, AspectRatio -> Automatic,
 PlotStyle -> {AbsoluteThickness[2], RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]},
 AxesLabel -> {"X", "Y"}];
```

Responde a las siguientes preguntas:

a) Explica cuál es la gráfica de cada una de las funciones.

b) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de $y = \cosh x$?

c) ¿Se observa alguna simetría en la función $y = \cosh x$? En caso afirmativo, trata de demostrarlo.

d) ¿Qué posición ocupa $y = \cosh x$ respecto a $\frac{1}{2}e^x$ y $\frac{1}{2}e^{-x}$? Razónalo.

e) ¿A qué *función* se aproxima $y = \cosh x$ cuando $x \to +\infty$? Escribe las razones de tu respuesta.

**Ejercicio 8:** Este ejercicio es análogo al anterior. Representa conjuntamente las funciones $Sinh[x]$, $\frac{1}{2}e^{x}$ y $-\frac{1}{2}e^{-x}$ y responde a las siguientes preguntas.

a) Explica cuál es la gráfica de cada una de las funciones.
b) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de $y = \sinh x$?
c) ¿Se observa alguna simetría en la función $y = \sinh x$? Demuéstralo
d) ¿Qué posición ocupa $y = \sinh x$ respecto a $\frac{1}{2}e^{x}$ y $-\frac{1}{2}e^{-x}$?
e) ¿A qué *función* se aproxima $y = \sinh x$ cuando $x \to +\infty$?

**Ejercicio 9:** Comprueba a mano que la derivada del coseno hiperbólico es el seno hiperbólico y que la del seno hiperbólico es el coseno hiperbólico. ¿Sabes calcular esas derivadas a mano?, inténtalo