PRÁCTICA 2: LAS FUNCIONES SINUSOIDALES EN ELECTRICIDAD

1. Información básica

■ Las funciones trigonométricas básicas

Las funciones trigonométricas básicas que manejaremos son las funciones seno y coseno: $\sin(\omega t)$ y $\cos(\omega t)$, donde el valor ω es la frecuencia (o velocidad) angular y t el tiempo. Claramente ambas funciones son periódicas y su período es $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

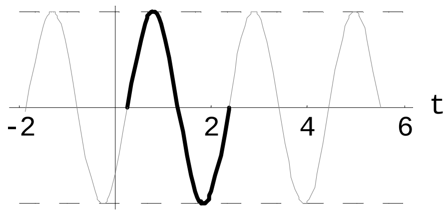
■ Armónicos o funciones sinusoidales

Un ***armónico*** o *función sinusoidal* es la que resulta al combinar (sumar) funciones trigonométricas de la misma frecuencia ω: $\boxed{a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)}$.

Esta suma admite ser expresada en la siguiente forma: $\boxed{a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)=A\sin(\omega t-\varphi)}$.

Es inmediato observar que un armónico es una función periódica de periodo $T=\frac{2\pi}{\omega}$, el común a los dos sumandos que lo han construido.

El movimiento de la proyección de esta función sobre el eje *Y* es un *movimiento vibratorio armónico*, oscilaciones arriba y abajo del eje *Y* (suponemos que el eje horizontal mide el tiempo).



■ Los parámetros de una función sinusoidal.

En las funciones sinusoidales $f(t) = A\sin(\omega t-\varphi)$ aparecen tres valores constantes o parámetros: A, ω y φ que tienen un nombre. Recordémoslos:

- la constante A es la *amplitud*,
- la constante ω es la *frecuencia angular o velocidad angular o pulsación*, y
- la última, la constante φ, es la *fase o desfase angular*.

Por otro lado, los coeficientes *a* y *b* de la expresión $\boxed{a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)=A\sin(\omega t-\varphi)}$ están relacionados con la amplitud y el desfase del armónico del siguiente modo:

- la *amplitud* $A=\sqrt{a^2+b^2}$,
- el *desfase angular* φ es el único número $\varphi\in(-\pi,\pi]$ que verifica: $\begin{cases}\cos\varphi=\frac{b}{A}\\ \sin\varphi=-\frac{a}{A}\end{cases}$.

Una observación: debe distinguirse el desfase angular de φ radianes del desfase temporal que es $\frac{\varphi}{\omega}$ segundos.

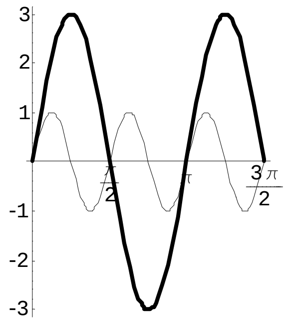
■ Combinación de funciones sinusoidales.

La combinación de funciones sinusoidales da lugar a funciones sinusoidales, a funciones periódicas no sinusoidales e incluso a funciones no periódicas. De hecho,

- *La suma de dos funciones sinusoidales de **igual frecuencia** es sinusoidal de la misma frecuencia.*
- *La suma de dos funciones sinusoidales de **distinta frecuencia** no es sinusoidal y puede ser periódica o no, dependiendo de si existe o no un múltiplo común de los dos periodos de las funciones sinusoidales*

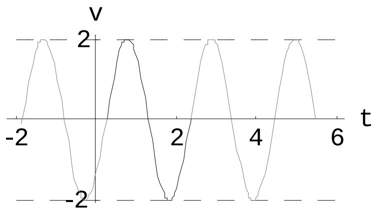
2. Ejercicios

Ejercicio 1: En la figura de al lado se observa la gráfica de las funciones trigonométricas: $3\sin 2t$ y $\sin 4t$.



1. Indica para cada una de ellas cuál es el valor de:
   a) La amplitud.
   b) La frecuencia.
   c) El período.
2. Completa la siguiente frase: *La línea de trazo grueso representa al armónico ……………; mientras que la línea de trazo fino representa al armónico …………..*

Ejercicio 2: La función sinusoidal o armónico $v(t) = 2\sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$ está dibujada en el gráfico que viene a continuación. Se pide:



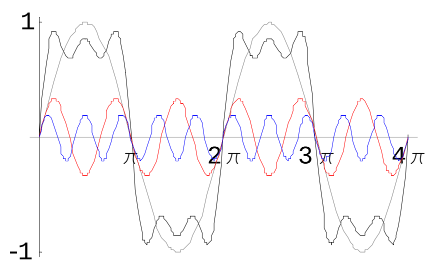
a) La amplitud de la oscilación
b) La frecuencia angular (radianes/seg), el período (seg) y la frecuencia (hertzios) de las ondas.
c) ¿Cuál es el desfase angular?, ¿y el temporal?
d) ¿Cuál es el intervalo de tiempos en el que se ha dibujado una onda completa (el trazo más oscuro)?

Ejercicio 3: La función $f(t) = \sin t + \cos t$ es suma de dos funciones trigonométricas de igual frecuencia $\omega = 1$ y, por tanto, es una función sinusoidal o armónico de la misma frecuencia. Se pide:

a) Completa la siguiente igualdad: $\sin t + \cos t = \underbrace{\ldots\ldots}_{Amplitud} \sin\left(t + \underbrace{\ldots\ldots}_{desfase}\right)$
b) Dibuja dos ondas completas de $f(t) = \sin t + \cos t$ comenzando en el valor del desfase temporal.

Ejercicio 4: Considera la función $p(t) = \sin t + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t)$, que es suma de tres armónicos.

Se pide:



a) ¿Es $p(t)$ un armónico? Averigua su período.
b) En la figura de al lado están las gráficas del polinomio trigonométrico y de los tres armónicos que lo forman.
   — Distingue a cuál corresponde cada una.
   — ¿Cuál es la diferencia gráfica más notoria entre $p(t)$ y sus armónicos?

Ejercicio 5: Las funciones $g(t)=\sin(2t)+\cos(3t)$ y $h(t)=\sin t+\sin(\pi t)$ son sumas de funciones sinusoidales. Dibuja la gráfica de cada una de ellas y responde a las siguientes cuestiones:

a) ¿Es sinusoidal? Si lo es, determina la amplitud, la frecuencia angular y el desfase angular.

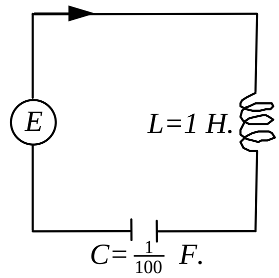
b) Si no es sinusoidal, ¿es periódica? En caso de que lo sea, averigua su período.

■ Ejercicios sobre funciones sinusoidales en circuitos eléctricos LC

Información: Un circuito LC consta de un condensador de capacidad C conectado a una bobina de inductancia L y suponemos que la conexión se ha realizado a través de un hilo que es un excelente conductor y, por tanto, que puede tomarse $R=0$ (no hay amortiguamiento).

Se llama *frecuencia natural del circuito* a $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ radianes/seg, que es la frecuencia de la función sinusoidal que describe la intensidad de la corriente que circula *libremente (sin conexión a una fuente de externa)* por ese circuito.

En los ejercicios 6 al 9, ambos inclusive, consideramos un circuito formado por un condensador de capacidad $C=10^{-2}$ faradios conectado a una bobina de $L=1$ henrio a través de un hilo sin resistencia.



Ejercicio 6: Supongamos que inicialmente el condensador está cargado con $q(0)=0.1$ culombios y que se deja circular *libremente* una corriente que al principio es de intensidad $i(0)=1$ amperio. En este caso, la intensidad del circuito oscila a lo largo del tiempo y viene dada por $\boxed{i(t)=\cos(10\,t)+\sin(10\,t)}$.

Dibuja esta sinusoide en el intervalo $t\in[-0.3,3]$ y responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Por qué es $i(t)=\cos(10\,t)+\sin(10\,t)$ una sinusoide?

b) ¿Cuál es la frecuencia natural del circuito?

c) ¿Cuál es la amplitud de la oscilación?

d) ¿Cuál es el desfase angular?, ¿y el temporal?

Ejercicio 7: Si ahora el circuito LC descrito parte del reposo (ni hay corriente inicial ni el condensador está cargado) y se le aplica una *tensión sinusoidal* $V(t)=30\sin(20t)$ (observar que su frecuencia es **muy diferente** de la frecuencia natural del circuito), entonces la intensidad de la corriente que circula viene dada por $i(t)=\underbrace{2\cos(10t)}_{libre}+\underbrace{2\sin\left(20\,t-\frac{\pi}{2}\right)}_{forzada}=2\cos(10t)-2\cos(20\,t)$.

Dibuja esta intensidad $\boxed{i(t)=2\cos(10t)-2\cos(20\,t)}$ en los dos primeros segundos y responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Es una sinusoide?, ¿por qué?

b) ¿Cuál es aproximadamente la máxima intensidad absoluta?

c) ¿Cuál es el período de $i(t)$?

Ejercicio 8 (Fenómeno de pulsaciones): Cuando al circuito LC que parte del reposo se le aplica una *tensión sinusoidal* $V(t)=30\sin\left(\frac{100}{11}t\right)$, cuya frecuencia está **muy cercana** a la frecuencia natural del circuito: $\omega=\frac{100}{11}=9.0909\ldots\approx 10=\omega_0$, entonces la intensidad de la corriente que circula viene dada por $i(t)=\underbrace{-\frac{110}{7}\cos(10t)}_{libre}+\underbrace{\frac{110}{7}\cos\left(\frac{100}{11}t\right)}_{forzada}$

a) Utiliza la fórmula trigonométrica $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ para convertir $i(t)=\frac{110}{7}\cos\left(\frac{100}{11}t\right)-\frac{110}{7}\cos(10t)$ en la expresión equivalente: $\boxed{i(t)=\frac{220}{7}\sin\left(\frac{5}{11}t\right)\,\sin\left(\frac{105}{11}t\right)}$

b) Dibuja esta función $i(t)$ junto con la función $A(t)=\frac{220}{7}\sin\left(\frac{5}{11}t\right)$ en un intervalo de tiempo de 25 segundos. Responde a las siguientes preguntas:
   - ¿Cuál es el periodo de $A(t)$?, ¿y el periodo de $i(t)$?
   - Después de $t=0$, ¿en qué instante vuelve a haber intensidad nula por primera vez?
   - ¿Cuál es la máxima intensidad del circuito?

El fenómeno que se observa en este circuito se conoce como *fenómeno de pulsaciones*.

Ejercicio 9 (Fenómeno de resonancia): Por último, si al circuito, que inicialmente estaba en reposo, se le aplica una *tensión sinusoidal* $V(t)=30\sin(10t)$ de frecuencia **igual** a la natural del circuito, la intensidad del circuito viene dada por $i(t)=\underbrace{15t\sin(10t)}_{forzada}$.

Dibuja en el mismo gráfico la función $\boxed{i(t)=15\,t\sin(10\,t)}$ y las rectas $y=15t$ e $y=-15t$ en un intervalo de tiempo de 6 segundos.

a) ¿Es $i(t)$ una sinusoide?, ¿es periódica?
b) ¿En qué instante, aproximadamente, la intensidad del circuito llega a ser de 60 amperios?
c) ¿Cuál es la máxima intensidad del circuito?

■ Ejercicios sobre funciones sinusoidales en circuitos eléctricos RLC

Ejercicio 10: La intensidad de la corriente que circula libremente por un circuito de las siguientes características: $R=1$ ohmios, $L=2$ henrios, $C=1$ faradio es $\boxed{i(t)=\frac{4}{\sqrt{7}}e^{-t/4}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)}$.

a) Halla los valores iniciales $i(0)$ e $i'(0)$.
b) Dibuja conjuntamente la gráfica de $i(t)$ y la de las dos exponenciales que la enmarcan en el intervalo de tiempo $[0,15]$.
c) ¿Cuál es la frecuencia natural del circuito?