PRÁCTICA 3: LAS FUNCIONES INVERSAS DE LAS TRIGONOMÉTRICAS

1. Información básica

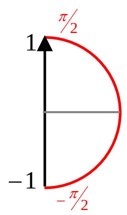
Muchas técnicas matemáticas aplicables a otras ciencias utilizan las funciones trigonométricas básicas: seno, coseno y tangente (omitimos sus recíprocas cosecante, secante y cotangente) así como el concepto de cambio de variable, por ejemplo $x = \sin t$. La «recuperación» de t a partir de x se efectúa mediante la función inversa. Es, por tanto, natural invertir estas funciones. La primera dificultad para hacerlo es que estas funciones no son inyectivas en R por ser periódicas. Para hablar de sus inversas es necesario restringir su dominio a un subconjunto de éste en el que lo sean. Para ello se considera:

$\sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$, $\quad \cos x : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$, $\quad \tan x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow (-\infty, +\infty)$

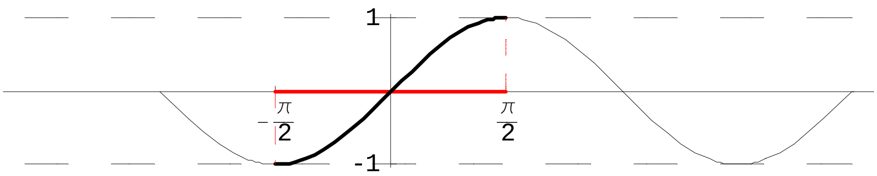
2. La función arco seno

La función seno restringida al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ es estrictamente creciente e impar.

$$\boxed{\sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]}$$



Por lo tanto, cada valor $x = \sin t$ entre -1 y 1 proviene de un único valor de t entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$.



La función inversa se llama arco seno (arco cuyo seno es x) y se denota arcsin

$$\arcsin x : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

La mayoría de las calculadoras utilizan la notación $\sin^{-1}$ para esta función.

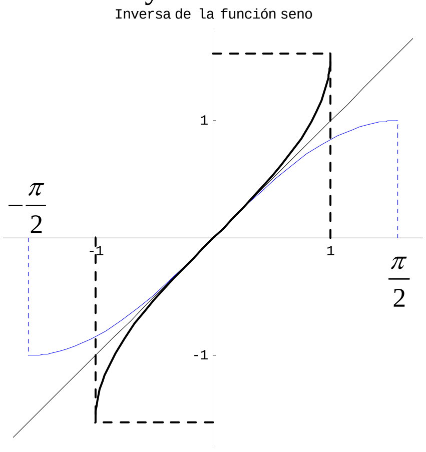
Ejercicio 1: Calcula el arco seno de cada uno de los siguientes valores: -1, 15 y $\frac{1}{2}$.

Ejercicio 2: Decide cuáles de las siguientes igualdades son ciertas (la decisión se ha de saber tomar sin realizar ninguna operación):

$\arcsin(\sin \pi) = \pi$ $\square$, $\quad \arcsin\left(\sin \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ $\square$, $\quad \arcsin(\sin 1) = 1$ $\square$,

$\sin(\arcsin(-0.65)) = -0.65$ $\square$, $\quad \sin(\arcsin(1.5)) = 1.5$ $\square$, $\quad \sin(\arcsin x) = x$ $\square$.

Ejercicio 3: Observa la gráfica de al lado y completa las siguientes frases: y

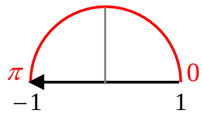


- Hay tres líneas continuas dibujadas en la gráfica, *la ecuación de la recta es ………., la curva que empieza en* $x=-\frac{\pi}{2}$ *y termina en* $x=\frac{\pi}{2}$ *es ………… y, por último, la curva que empieza en* $x=$...... *y termina en* $x=$...... *es* $y=\arcsin x$.
- Las dos curvas dibujadas son …………….. respecto a ………………………………….

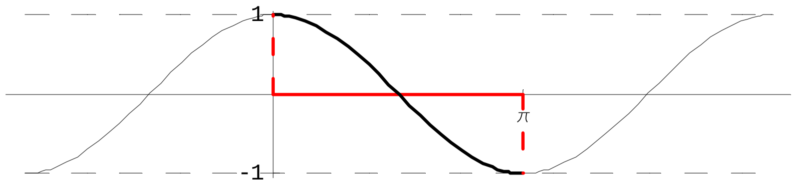
Ejercicio 4: En las siguientes frases tacha lo que sea falso:

- La función $y=\arcsin x$ *es creciente / decreciente.*
- La función $y=\arcsin x$ *es*
  - *par (simétrica respecto al eje vertical),*
  - *es impar (simétrica respecto al origen de coordenadas),*
  - *nada de lo anterior.*

3. La función arco coseno



Para invertir la función $y=\cos x$ restringimos el dominio a los ángulos x que están entre 0 y π, $\cos x:[0,\pi]\longrightarrow[-1,1]$. La función $y=\cos x$ es decreciente en el intervalo $[0,\pi]$ y, por consiguiente, cada salida o valor de y, que está entre -1 y 1, proviene de un único valor de x entre 0 y π.



En *Mathematica* la función inversa del coseno se denota **ArcCos[ ]** y $\cos^{-1}$ en las calculadoras.

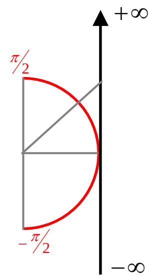
Ejercicio 5: Calcula el arco coseno de cada uno de los siguientes valores: -1, 15, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ejercicio 6: Decide cuales de las siguientes igualdades son ciertas (de nuevo, deberías tratar de responder sin realizar operaciones):

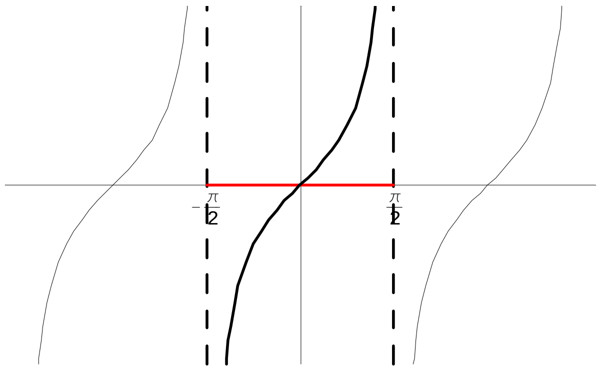
$\arccos(\cos\pi)=\pi$ $\square$, $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=-\frac{\pi}{4}$ $\square$, $\arccos(\cos t)=t$ $\square$

$\cos(\arccos(0.65))=0.65$ $\square$, $\cos(\arccos(21))=21$ $\square$.

4. La función arco tangente



La función tangente restringida al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\tan t:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\longrightarrow(-\infty,+\infty)$, es estrictamente creciente e impar. Por lo tanto, cada valor $x=\tan t$ proviene de un único valor de t entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$.



En *Mathematica* la función arco tangente se denota **ArcTan[ ]** y $\tan^{-1}$ en las calculadoras.

Ejercicio 7: Calcula el arco tangente de cada uno de los siguientes valores: -1, 15, 1, $\sqrt{3}$ y 4.

Ejercicio 8: Halla los siguientes números: `Tan[ArcTan[x]]`, `ArcTan[Tan[-1.5]]`.

Ejercicio 9: Ejecuta las órdenes siguientes para conseguir el dibujo de la función tangente y de su inversa, la función arco tangente.

```
fun = Plot[Tan[x], {x, -π/2, π/2}, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]}];

inv = Plot[ArcTan[x], {x, -3, 3}, PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1]}];

bisec = Plot[x, {x, -3, 3}];

Show[{bisec, fun, inv}, AspectRatio -> Automatic,
   PlotRange -> {-3, 3}, Ticks -> {{-π/2, π/2}, {-π/2, π/2}}];
```

Indica cuál es la función tangente y cuál es la función arco tangente.
Observa la simetría entre la gráfica de la tangente y de su inversa.

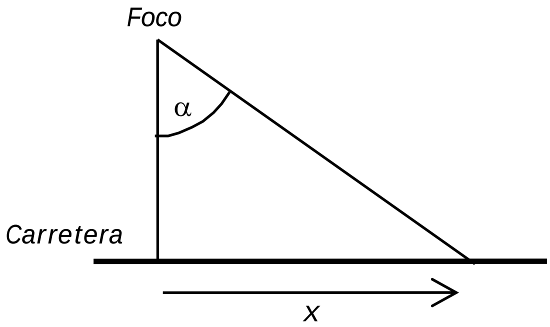
Ejercicio 10: Pide a *Mathematica* que calcule los siguientes límites
`Limit[ArcTan[x], x -> +∞]`, `Limit[ArcTan[x], x -> -∞]`.

Ejercicio 11: Calcula la derivada de las funciones "arco seno", "arco coseno" y "arco tangente". Pídele a *Mathematica* que dibuje las gráficas de las funciones derivada en intervalos adecuados.

Ejercicio 12: La función arco tangente aparece al calcular las primitivas de muchas funciones racionales, es decir, cocientes de polinomios. Pide a *Mathematica* las siguientes primitivas

$$\int \frac{2}{x^2 + x + 1}\, dx \quad , \quad \int \frac{x^2 + 2}{x^4 + 1}\, dx$$

Ejercicio 13: Un foco está situado a 200 metros de una carretera recta. Una persona empieza a caminar por la carretera desde el punto más próximo al foco. El foco le sigue con su luz. Véase la figura.

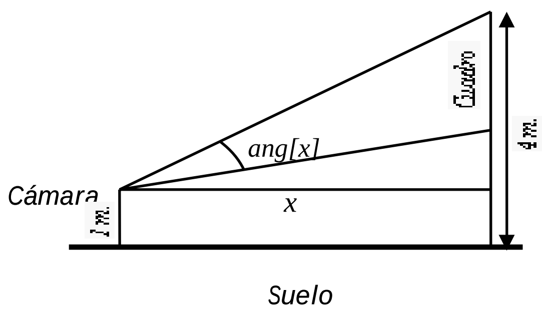


a) Utiliza la función arco tangente para determinar el ángulo α recorrido por el foco en función de la distancia x recorrida por la persona: $\alpha(x) =$

¿Con qué velocidad (en radianes/metro) cambia este ángulo cuando la persona ha recorrido 8 Km.?

b) Si la persona camina a una velocidad constante de 4 Km/hora, ¿con qué velocidad (en radianes/seg) cambia este ángulo $\alpha(t)$ cuando han transcurrido dos horas?

Ejercicio 14: Un cuadro de 2 metros de altura está colgado en una pared a una altura de 4 metros. A un metro del suelo y a una distancia x metros de la pared se sitúa el objetivo de una cámara fotográfica. Véase la figura.



a) Escribe cómo calcular el ángulo bajo el que se contempla el cuadro (desde el objetivo fotográfico) en función de x (NO lo hace el ordenador), es decir, completa $ang(x) = \ldots\ldots\ldots$

b) Pide a *Mathematica* que trace la gráfica de la función `ang[x_]` en un intervalo adecuado.

c) A la vista de la gráfica de la función `ang[x_]`, da un valor aproximado x_0 de la distancia a la que debe colocarse el objetivo para que el ángulo sea máximo.

d) ¿Cómo se comporta `ang[x_]` cuando el objetivo se acerca a la pared ($x \to 0$)? ¿Y cuando se aleja?