PRÁCTICA 8: INTEGRAL DE LINEA DE UN CAMPO ESCALAR

I. Longitud de un arco de curva

1. Información básica

La distancia a lo largo de una curva se suele denotar mediante la letra s y se llama longitud de arco. Como la relación entre la velocidad y la distancia es $\|\mathbf{v}(t)\| = \frac{ds}{dt}$, decidimos que la distancia es $s = \int \frac{ds}{dt}dt = \int \|\mathbf{v}(t)\| dt = \int \|\mathbf{r}'(t)\| dt$.

Así pues, la fórmula $\boxed{L = \int_{t=a}^{t=b} \|\mathbf{r}'(t)\| dt}$ nos da la longitud de la curva $\mathbf{r}(t)$ desde $t = a$ hasta $t = b$.

2. Ejercicios

Ejercicio 1: Considera la hélice circular $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = t \end{cases}$.

a) Calcula, sin usar el ordenador, el vector velocidad y los vectores tangente y normal unitarios de esta hélice circular en un punto genérico.

b) Dibuja una vuelta completa de la hélice.

c) ¿Cuál es la longitud de media vuelta de esta hélice? Para responder a esta pregunta puedes usar las siguientes órdenes:

```
helice[t_] = {Cos[t], Sin[t], t};
velocidad[t_] = √(helice'[t].helice'[t]);
semivuelta = ∫_0^π velocidad[t] ⅆt
```

Ejercicio 2: Dibuja la curva plana $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$, llamada *cicloide*, para $t \in [0, 4\pi]$. ¿Cuál es la longitud de uno de sus arcos?

Ejercicio 3: Un satélite artificial describe una trayectoria elíptica dada por las ecuaciones $\begin{cases} x(t) = 300 \cos \frac{2\pi}{90} t \\ y(t) = 200 \sin \frac{2\pi}{90} t \end{cases}$ donde x e y están dadas en kilómetros y t en minutos.

a) ¿Cuántos minutos tarda en recorrer la elipse completa?

b) Calcula la distancia recorrida por el satélite entre los instantes $t = 0$ y $t = 15$.

II. Integral de línea de un campo escalar

1. Información básica

En las integrales simples $\int_a^b f(x)\,dx$ se integra sobre un intervalo $[a,b]$. En esta sección vamos a definir y usar un nuevo tipo de integral, llamada integral de línea o integral curvilínea $\int_C f(x,y)\,ds$ en la que se integra sobre una curva C suave a trozos.

Si $f(x,y)$ es un campo escalar definido sobre una región del plano que contiene a la curva suave C, se define la *integral de línea de f sobre C* como

$$\int_C f(x,y)\,ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right) \Delta s_i$$

siempre que el límite exista.

Para calcular dicha integral cuando la curva plana C está dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, con $a \le t \le b$, utilizamos que $ds = \| \mathbf{r}'(t) \| dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\ dt$ y así nos queda:

$$\boxed{\int_C f(x,y)\,ds = \int_{t=a}^{t=b} f\left(x(t), y(t)\right) \underbrace{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}_{\|\mathbf{r}'(t)\|}\ dt}$$

Una fórmula similar es válida para una curva en el espacio.

Te ayudará a entender el concepto de integral que hemos descrito el siguiente ejemplo.

Ejemplo: ***Calculamos la integral de línea de*** $f\left(x,y\right) = E^{-\left(x^2+y^2\right)}$ ***sobre la curva plana*** $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$***, para*** $0 \le t \le 1$ ***y damos dos interpretaciones del resultado, según sea el significado de la función escalar.***

Para calcular la integral curvilínea $\int_C f(x,y)\,ds = \int_{t=a}^{t=b} f\left(x(t), y(t)\right) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\ dt$

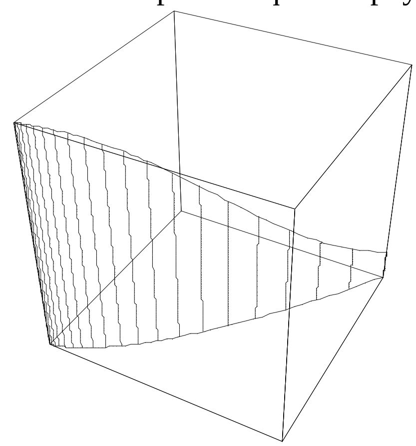
necesitamos el valor de la función f en los puntos de la curva: $f\left(x(t), y(t)\right) = E^{-\left(t^4+t^6\right)}$

y la velocidad: $\| \mathbf{r}'(t) \| = \sqrt{4t^2 + 9t^4}$.

En consecuencia, $$\int_C f(x,y)\,ds = \int_{t=0}^{t=1} \underbrace{E^{-\left(t^4+t^6\right)}}_{f\left(x(t),y(t)\right)} \underbrace{\sqrt{4t^2+9t^4}}_{\|\mathbf{v}(t)\|}\ dt\,,$$

que al pedirle a *Mathematica* que la resuelva nos da como resultado: 0.859962.

a. Una posible interpretación del resultado obtenido es el del área de una superficie que se apoya sobre la curva $\begin{cases} x(t)=t^2 \\ y(t)=t^3 \end{cases}$, desde $t=0$ hasta $t=1$, y con alturas dadas por $f\left(x,y\right)=E^{-\left(x^2+y^2\right)}$.



La imagen del corte vertical cuya área calcula la integral de línea

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_{t=0}^{t=1} \underbrace{E^{-\left(t^4+t^6\right)}}_{altura} \underbrace{\sqrt{4t^2+9t^4}}_{long.\,base}\, dt$$

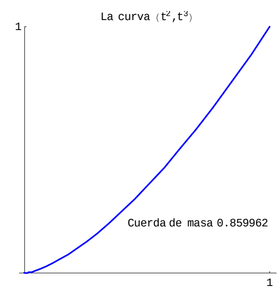
es la que aparece al lado.

El dibujo se ha realizado usando las posibilidades gráficas del *Mathematica.*

b. Otra posible interpretación: Supongamos que C es una varilla de un material cuya densidad en cada punto la mide la función escalar $f(x,y)$ gr/cm. Entonces la integral curvilínea

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_{t=0}^{t=1} \underbrace{E^{-\left(t^4+t^6\right)}}_{densidad\ (gr/cm)} \underbrace{\sqrt{4t^2+9t^4}}_{longitud\ (cm)}\, dt$$

mide la masa de la varilla, que en este caso es 0.86 gramos.



2. Ejercicios

Ejercicio 4: Calcula la masa de dos vueltas de un muelle que tiene la forma de hélice circular $\mathbf{r}(t)=3\cos t\,\mathbf{i}+3\sin t\,\mathbf{j}+2t\,\mathbf{k}$ suponiendo que su densidad es constante $\rho\left(x,y,z\right)=2$ gr/cm.

Ejercicio 5: Calcula el área de la superficie que se apoya en el cuarto de círculo $x^2+y^2=1$ del primer cuadrante y con alturas dadas por $h\left(x,y\right)=x+y$.

Ejercicio 6: Considera la curva plana $\begin{cases} x(t)=3\cos t+\cos 3t \\ y(t)=3\sin t-\sin 3t \end{cases}$, llamada *astroide*, para $t\in\left[0,2\pi\right]$.

a) Dibújala (necesitas la orden ParametricPlot). Indica sobre el dibujo en qué punto comienza el recorrido de la curva y cuál es su sentido.

b) Calcula la longitud de la astroide.

c) Si la densidad del hilo que forma la astroide es constante $\rho(x,y)=2$ gr/cm, ¿cuál es la masa total del hilo? ¿Y si la densidad fuera variable $\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ gr/cm?

Ejercicio 7: Considera la curva plana $C:\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=t^2 \end{cases}$ para los valores del parámetro t entre 0 y 2.

a) Dibújala, ¿cómo se llama esta curva plana?

b) Averigua cuál es el vector velocidad y la velocidad en $t=1$, ¿cuales son las componentes del vector tangente unitario en el punto $(1,1)$?

c) ¿Cuáles son las ecuaciones paramétricas de la curva *cima*, sobre la superficie $z=xy$, que es imagen de C?

d) Indica un vector tangente a la curva *cima* en el punto $(1,1,1)$.

Averigua cuál es la tercera coordenada del vector $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, ???\right)$ si ha de ser tangente a la curva *cima* en el punto $(1,1,1)$.

e) Obtén la longitud de la curva *base* C y de la curva *cima*.

f) Calcula el área del corte vertical de la montaña $z=xy$ sobre la curva $\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=t^2 \end{cases}$.