PRÁCTICA 9: RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES I

I. Operaciones con matrices usando *Mathematica*

■ Introducir matrices en *Mathematica*: listas y escritura de cuadro. Matrices identidad y diagonales.

El programa *Mathematica* entiende las matrices como listas de listas. Pero, ¿qué es una lista?; pues muy sencillo: $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es una lista de elementos. Las listas son objetos muy generales, y aquí sólo nos interesa destacar que

— $\{a, b, c\}$ representa un vector tridimensional;

— $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ representa un *matriz* cuya primera fila es el primer vector $\{a, b\}$ y cuya segunda fila es $\{c, d\}$.

Un ejemplo de matriz 2×3 es: `A = {{1, 2, 3}, {8, 1, 1}}`
que puedes escribir en la forma habitual de cuadro de números si haces cualquiera de estas dos acciones:

— Utiliza el símbolo convencional de matriz de la paleta **BasicInput**, que siempre muestra una matriz 2×2 a la que puedes añadir más filas tecleando CTRL a la vez que "retorno de carro" y añadir columnas tecleando CTRL+coma. Prueba a escribir la matriz A anterior.

— O bien, construye la matriz eligiendo **"Create Table/Matrix/Palette…"** del menú **Input**. Prueba este método y escribe una matriz cualquiera de tamaño 4×3.

Ahora bien, puede suceder que *Mathematica* nos devuelva las matrices escritas en forma de listas a lo cual no estamos acostumbrados, más bien preferimos verlas como un cuadro de números. Por ello, el programa *Mathematica* nos permite acceder a la representación habitual de la matriz A mediante la orden

`MatrixForm[A]` o bien `A // MatrixForm`.

Claro que es muy pesado escribir para cada matriz que nos aparezca la orden `MatrixForm`, así que viene muy bien ejecutar la siguiente orden al principio de la sesión

```
$Post = Function[x, If[MatrixQ[x], MatrixForm[x], x]];
```

y así todas las matrices aparecen escritas en la forma habitual, de cuadro de números, sin tener que indicarlo cada vez.

¿Cómo podemos trabajar con la matriz identidad? Para introducir la matriz identidad no es obligatorio teclear todos los ceros y unos que contiene, basta escribir la orden `IdentityMatrix[n]` donde el número n indica el orden de la matriz identidad que deseamos usar. Así, por ejemplo, la entrada `IdentityMatrix[3]` da como salida la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Del mismo modo, para introducir una *matriz diagonal* disponemos de un atajo. El escribir la orden **DiagonalMatrix**[$\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$] da lugar a una matriz cuyos elementos diagonales están en la lista entre corchetes y obviamente ceros en los demás lugares. Por ejemplo, al ejecutar la orden `DiagonalMatrix[{a, b, c, d}]` , conseguimos la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

■ Operaciones con matrices. Traspuesta de una matriz.

Las operaciones con matrices: suma, producto por un escalar y producto de matrices se indican en *Mathematica* en la forma convencional. Escribimos algunos ejemplos:

— Suma de matrices: La suma se escribe igual que lo hacemos a mano `A + B`

— Producto por un escalar: Tres veces la matriz A, se escribe $3\,A$ (obsérvese el espacio entre el tres y el nombre de la matriz) o $3 * A$.

— `u . v` o `Dot[u, v]` da el producto escalar de vectores o el producto de matrices, según lo que sean u y v.

Por ejemplo, `{a, b} . {c, d}` resulta `a c + b d`

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ `. {x, y}` resulta `{a x + b y, c x + d y}`

Para trasponer una matriz tenemos la orden `Transpose[A]`. Por ejemplo, al escribir las órdenes: `A =` $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$`; Transpose[A]` la respuesta es $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

II. Método de Gauss para resolver sistemas lineales: la orden RowReduce de *Mathematica*

1. Información básica

La resolución directa o los métodos directos de resolución de un sistema lineal se basan en la transformación del sistema original en otro equivalente cuyas soluciones se obtengan de forma sencilla. Es pues necesario, en primer lugar, observar que ciertos sistemas lineales son extraordinariamente fáciles de resolver. Entre estos tipos destacan los que su matriz de coeficientes es triangular o los que es ortogonal.

Recordemos que si el sistema $Ax = b$ es triangular superior el método de resolución es el conocido como sustitución hacia atrás o regresiva y que, análogamente, puede hacerse sustitución hacia delante o progresiva para los sistemas triangulares inferiores.

Para otro tipos de matrices más generales se han desarrollado los métodos gaussianos, que son los métodos clásicos de reducción de sistemas a forma triangular. Están basados en la anulación de los elementos bajo la diagonal principal de la matriz de coeficientes, mediante combinaciones lineales elementales de las ecuaciones.

En el método de Gauss se observan dos fases:

1. En la primera se produce la eliminación gaussiana de todos los elementos subdiagonales de la matriz ampliada (la matriz formada por la matriz de coeficientes a la que se añade una última columna que es el vector de los términos independientes)
2. En la segunda fase hay que resolver un sistema triangular superior.

■ La orden `RowReduce[ ]`.

Al ejecutar la orden `RowReduce[A]` se obtiene como resultado la forma escalonada reducida de la matriz A, para lo cual *Mathematica* utiliza una versión de la eliminación gaussiana para producir ceros por debajo de cada pivote, previamente convertido en 1, y también por encima (recuerda la eliminación de Gauss-Jordan). Por tanto, realiza la primera fase del método de Gauss y, en algunos casos, es necesario terminar el trabajo resolviendo el sistema triangular al que se ha llegado.

Así, por ejemplo,

$$\texttt{RowReduce}\left[\begin{pmatrix} 3 & 1 & a \\ 2 & 1 & b \end{pmatrix}\right]$$

produce como resultado

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a-b \\ 0 & 1 & -2a+3b \end{pmatrix}.$$

(Nótese que se pueden usar matrices simbólicas, además de las numéricas).

Por cierto que la operación anterior es una forma de resolver el sistema lineal $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Sus soluciones son $\begin{cases} x = a - b \\ y = -2a + 3b \end{cases}$.

2. Ejercicios

Ejercicio 1: Resuelve el sistema $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + 5z = 1 \\ 2x + y + 3z = -2 \end{cases}$ usando la orden `RowReduce[matriz]`

Para ello aplica dicha orden a su matriz ampliada así:

$$\texttt{RowReduce}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\right]$$

Ejercicio 2: Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} -2 & a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & -2 & a \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Repasa el método de Gauss-Jordan de cálculo de inversas y escribe cuál es la matriz de la que se parte para calcular la inversa de M.
b) Usa la orden `RowReduce[matriz]` del programa *Mathematica* para obtener esa inversa.
c) El programa *Mathematica* tiene predefinida la orden `Inverse[M]` que calcula la inversa de una matriz M. Úsala para calcular la inversa de la matriz M de este ejercicio.

Ejercicio 3: Si A es una matriz cuadrada regular, entonces $\text{RowReduce}[A] \to \text{IdentityMatrix}[A]$, es decir, una matriz cuadrada regular es equivalente a la matriz identidad.

Comprueba que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ es una matriz regular (inversible o de rango tres) verificando que se reduce a la matriz identidad. La orden que debes ejecutar es

$$\texttt{RowReduce}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\right]$$

Ejercicio 4: Ejecuta la orden

$$\texttt{RowReduce}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\right]$$

y a la vista de la matriz obtenida responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Has obtenido la matriz identidad?

b) ¿Cuál es el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$?

Ejercicio 5: !Ojo!, la orden **RowReduce**$[m]$ realiza las permutaciones de filas (nunca de columnas) que el programa decida. Así, por ejemplo, al ejecutar la orden

$$\texttt{RowReduce}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

produce la siguiente matriz reducida

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) ¿Qué permutación de filas se ha realizado? Piensa que el programa realiza la eliminación gaussiana como nosotros la hacemos.

b) ¿Cuál es el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Ejercicio 6: Resuelve el sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \\ x + z = 0 \end{cases}$ aplicando la orden `RowReduce[matriz]` a su matriz ampliada.

III. La estructura de las soluciones de un sistema lineal

1. Información básica

En esta sección vamos a usar las órdenes **LinearSolve[,]** y **NullSpace[ ]** del programa *Mathematica* para resolver un sistema lineal $Ax = b$. Para comprender el procedimiento, es preciso que recordemos la estructura de sus soluciones.

El conjunto de soluciones de un sistema compatible $Ax = b$ admite la siguiente escritura:

$$\boxed{\textit{Soluciones de la homogénea + una solución particular}}$$

¿Y qué hace cada una de estas nuevas órdenes de *Mathematica*?

— Por un lado, **NullSpace[** A **]** construye una lista de vectores que formen una base del espacio nulo de la matriz A, es decir, una base del espacio de soluciones de la homogénea $Ax = 0$.

— Por otro lado, **LinearSolve[** A**,**b **]** calcula *una* solución particular del sistema lineal $Ax = b$.

2. Ejercicios

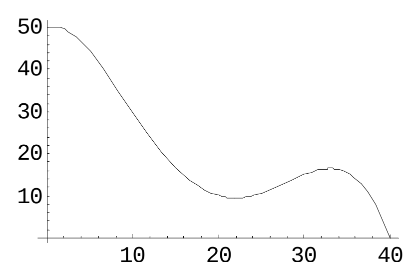
Ejercicio 7: Considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x+y-t-4u=4 \\ 3x-y+2z-5u=13 \\ x+3y+z-t-6u=7 \\ x+2y-3z-2t-2u=-7 \end{cases}$.

a) Usa **NullSpace**[ ] para calcular las soluciones del sistema homogéneo asociado, ¿cuál es el rango de la matriz de coeficientes?
b) Usa **LinearSolve**[ ] para obtener una solución particular del sistema lineal dado. Escribe todas sus soluciones.
c) Resuélvelo usando el comando **RowReduce**[ ].
d) Resuélvelo usando el comando **Solve**[ ] (muy usado en la práctica 3).

Ejercicio 8: Se quiere construir un tobogán con la forma que se ve en la figura de al lado. Se conjetura que esa curva es una función polinómica de grado menor o igual que 4:

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4,$$

que verifica las condiciones: $p(0) = 50$, $p(10) = 30$, $p(40) = 0$, $p'(0) = \frac{7}{12}$ y $p'(10) = -3$.



a) Escribe el sistema lineal $Ax = m$ que han de cumplir los coeficientes de $p(x)$.
b) Resuelve el sistema anterior para calcular $p(x)$ y dibuja el polinomio.