PRÁCTICA 11: APROXIMACIONES DE FOURIER I

I. Funciones trigonométricas. Armónicos.

1. Información básica

■ Las funciones trigonométricas básicas

Las funciones trigonométricas básicas son las funciones seno y coseno: $\sin\omega t$ y $\cos\omega t$, donde el valor ω es la frecuencia (o velocidad) angular. Claramente ambas funciones son periódicas y su período es $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

■ Armónicos o funciones sinusoidales

Un ***armónico*** o *función sinusoidal* es la que resulta al combinar (sumar) funciones trigonométricas de la misma frecuencia ω: $\boxed{a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)}$.

Esta suma admite ser expresada en la siguiente forma:

$$\boxed{a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = A\sin(\omega t - \varphi)}.$$

Es inmediato observar que un armónico es una función periódica de periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, el común a los dos sumandos que lo han construido.

Obsérvese que la función sinusoidal contiene tres constantes o parámetros, A, ω y φ, que describimos brevemente. Por un lado, un armónico tiene una *amplitud* $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, su *frecuencia* ω es la común a los sumandos y, además, hay un *desfase angular* φ. Por cierto que este desfase angular es el único número $\varphi \in (-\pi, \pi]$ que verifica: $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{b}{A} \\ \sin\varphi = -\frac{a}{A} \end{cases}$. Debe distinguirse el desfase angular de φ radianes del desfase temporal que es $\dfrac{\varphi}{\omega}$ segundos.

■ Polinomios trigonométricos

Un *polinomio trigonométrico* es la suma de armónicos de frecuencias múltiplos de una dada ω, es decir, un polinomio trigonométrico es una combinación lineal de las funciones trigonométricas $\{1, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \cos(2\omega t), \sin(2\omega t), \dots, \cos(n\omega t), \sin(n\omega t)\}$.

Suponiendo, pues, que la frecuencia fijada de partida es ω, que, por cierto, se llama *frecuencia fundamental*, el polinomio trigonométrico de orden n es de la forma:

$$\boxed{\begin{aligned} p_n(t) = a_0 &+ \underbrace{(a_1 \sin\omega t + b_1 \cos\omega t)}_{\text{armónico de frecuencia } \omega} + \underbrace{(a_2 \sin 2\omega t + b_2 \cos 2\omega t)}_{\text{armónico de frecuencia } 2\omega} + \underbrace{(a_3 \sin 3\omega t + b_3 \cos 3\omega t)}_{\text{armónico de frecuencia } 3\omega} + \ldots\ldots + \\ &+ \underbrace{(a_n \sin n\omega t + b_n \cos n\omega t)}_{\text{armónico de frecuencia } n\omega} \end{aligned}}$$

o bien, $\boxed{p_n(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t - \varphi_2) + A_3 \sin(3\omega t - \varphi_3) + \ldots + A_n \sin(n\,\omega t - \varphi_n)}$

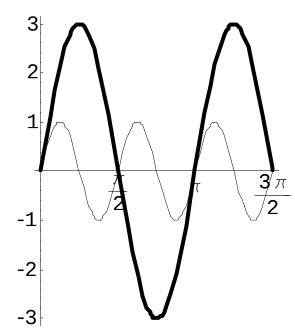
Obsérvese que todos los armónicos que intervienen en el polinomio trigonométrico son periódicos de período común $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, por tanto, *el polinomio trigonométrico también es periódico de período* $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

El caso más importante de polinomio trigonométrico es el de frecuencia fundamental ω=1, es decir, el de período $T = 2\pi$. Su expresión es

$$\boxed{\begin{aligned} p_n(t) &= a_0 + \underbrace{(a_1 \sin t + b_1 \cos t)}_{\text{armónico de frecuencia 1}} + \underbrace{(a_2 \sin 2t + b_2 \cos 2t)}_{\text{armónico de frecuencia 2}} + \underbrace{(a_3 \sin 3t + b_3 \cos 3t)}_{\text{armónico de frecuencia 3}} + \ldots\ldots + \underbrace{(a_n \sin nt + b_n \cos nt)}_{\text{armónico de frecuencia } n} = \\ &= A_0 + A_1 \sin(t - \varphi_1) + A_2 \sin(2t - \varphi_2) + A_3 \sin(3t - \varphi_3) + \ldots + A_n \sin(n\,t - \varphi_n) \end{aligned}}$$

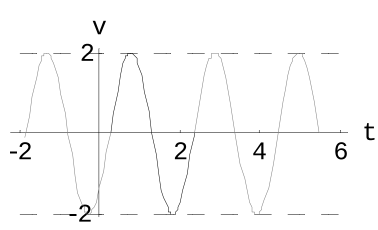
2. Ejercicios. En estos ejercicios no necesitas el ordenador

Ejercicio 1: En la figura de al lado se observa la gráfica de las funciones trigonométricas: $3\sin 2t$ y $\sin 4t$.



1. Indica para cada una de ellas cuál es el valor de:
   a) La amplitud.
   b) La frecuencia.
   c) El período.
2. Completa la siguiente frase: *La línea de trazo grueso representa al armónico ……………; mientras que la línea de trazo fino representa al armónico …………*.

Ejercicio 2: La función sinusoidal o armónico $v(t) = 2\sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$ está dibujada en el gráfico que viene a continuación.



Se pide:

a) La amplitud de la oscilación
b) La frecuencia angular (radianes/seg), el período (seg) y la frecuencia (hertzios) de las ondas.
c) ¿Cuál es el desfase angular?, ¿y el temporal?
d) ¿Cuál es el intervalo de tiempos en el que se ha dibujado una onda completa (el trazo más oscuro)?

Ejercicio 3: La función $f(t) = \sin t + \cos t$ es suma de dos funciones trigonométricas de igual frecuencia $\omega = 1$ y, por tanto, es una función sinusoidal o armónico de la misma frecuencia. Se pide:

a) Completa la siguiente igualdad: $\sin t + \cos t = \underbrace{\ldots\ldots}_{Amplitud} \sin\left(t + \underbrace{\ldots\ldots}_{desfase}\right)$

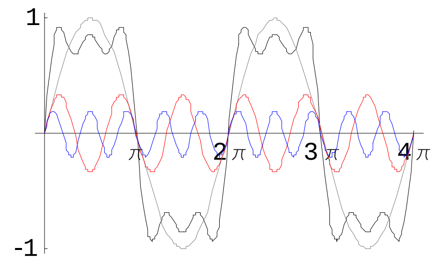
b) Dibuja dos ondas completas de $f(t)=\sin t+\cos t$ comenzando en el valor del desfase temporal.

Ejercicio 4: Considera el polinomio trigonométrico $p(t)=\sin t+\frac{1}{3}\sin(3t)+\frac{1}{5}\sin(5t)$. Se pide:

a) ¿Cuál es su frecuencia fundamental?, ¿y el período?

b) En la figura de al lado están las gráficas del polinomio trigonométrico y de los tres armónicos que lo forman.
   — Distingue a cuál corresponde cada una.
   — ¿Cuál es la diferencia gráfica más notoria entre el polinomio trigonométrico y sus armónicos?

c) Dibuja en un gráfico de barras los coeficientes de cada armónico.



II. Oscilaciones o funciones periódicas: construcción y gráficas

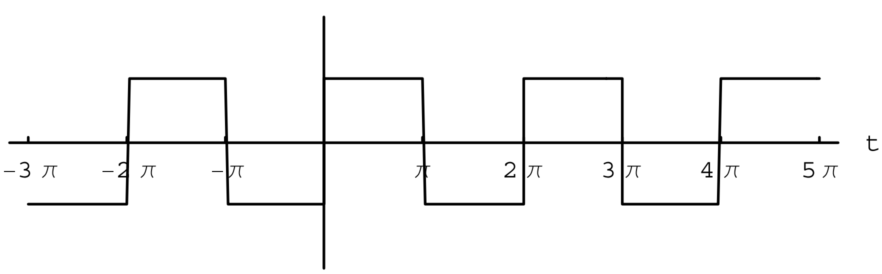
1. Información básica

Las funciones trigonométricas y sus combinaciones lineales (los armónicos y los polinomios trigonométricos) son los casos más conocidos de funciones periódicas, pero hay otras formas de onda periódicas. Comenzamos escribiendo la ya conocida definición de función periódica y luego nos ocupamos de construir y dibujar algunas funciones periódicas que no son trigonométricas.

"Una función f es *periódica de período* T si, para cualquier valor de t, verifica: $f(t+T)=f(t)$".

Como consecuencia de la definición, es fácil ver que los valores de la función se repiten indefinidamente, pues en $t+2T$, $t+3T$, $t+4T$, …, su valor coincide con $f(t)$.

Las funciones periódicas que se suelen utilizar en la práctica se construyen generalmente como una extensión de una dada en un intervalo. Por ejemplo, una *onda rectangular* es la función periódica que en el intervalo $[-\pi,\pi]$ toma los valores $f(t)=\begin{cases}-1, & \text{si } -\pi<t<0\\ 1, & \text{si } 0<t<\pi\end{cases}$ y que se extiende repitiendo estos valores en intervalos consecutivos de igual longitud. Observa la gráfica de esta función en la siguiente figura.



En esta sección nuestra tarea es saber extender periódicamente una función y en algunos casos sencillos conseguir su gráfica con ayuda del programa *Mathematica*.

2. Ejercicios

Ejercicio 5: *Onda en diente de sierra*. Se trata de ondas que se construyen a partir de un segmento inclinado que se repite.

Por ejemplo, el segmento de partida puede ser $f(t) = 0.5 + t$ cuando $t \in [-0.5, 0.5]$, que al extenderlo periódicamente con período $T = 1$, se obtiene la onda en diente de sierra.

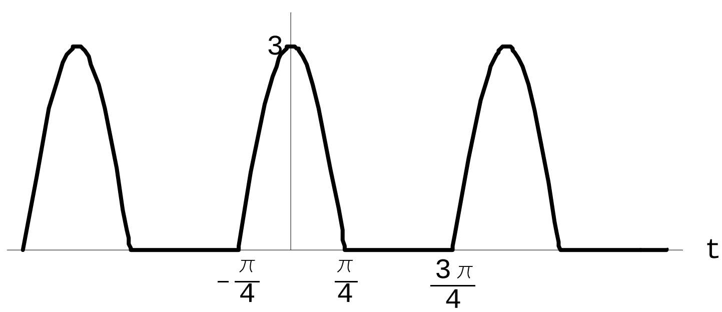
Dibuja con papel y lápiz los dientes de sierra del intervalo $t \in [-2.5, 2.5]$.

Ejercicio 6: *Una onda sinusoidal rectificada* es una función seno modificada para que tome el valor cero en aquellos intervalos en los que el seno es negativo.

Se puede expresar de diferentes maneras. Una de ellas es $f(t) = \begin{cases} 3\sin t, & \text{si } 0 < t < \pi \\ 0, & \text{si } \pi < t < 2\pi \end{cases}$ en el intervalo $t \in [0, 2\pi]$, para luego extenderse a izquierda y derecha cada $T = 2\pi$ unidades. Otra, mucho más concisa, es `Max[3 Sin[t], 0]`. Se pide:

a) Dibuja, a mano, cuatro ondas completas de la onda sinusoidal $3\sin t$ rectificada, dos a la izquierda del cero y dos a la derecha. Haz el mismo dibujo usando el programa *Mathematica*.

b) Averigua una forma de escribir la fórmula de la sinusoide rectificada que hay en el gráfica siguiente:



Ejercicio 7: *Una onda triangular*. Dibuja a mano la función $f(t) = \begin{cases} t+1, & \text{si } -1 < t < 0 \\ -t+1, & \text{si } 0 < t < 1 \end{cases}$.

a) Construye, también a mano, desde $t = -1$ hasta $t = 7$ la extensión periódica de la onda básica dibujada. ¿Cuál es el período?

b) Observa las ondas triangulares que has obtenido, ¿forman una función par?

III. El producto escalar en el espacio vectorial de las funciones periódicas de periodo 2π

1. Información básica

■ Antecedente: el producto escalar en $\mathbb{R}^n$

Recuerda que en el espacio $\mathbb{R}^n$, de dimensión finita, hay definido un producto escalar como sigue: si $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n)$ y $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3,\ldots,v_n)$ son dos vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces ***el producto escalar*** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es el número real $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3+\ldots+u_nv_n=\sum_{i=1}^{n}u_iv_i$.

De este producto escalar se deduce cómo medir longitudes de vectores, cómo proyectar ortogonalmente vectores e incluso cómo calcular el ángulo entre dos vectores. Las fórmulas son estas:

— La longitud o norma de $\mathbf{u}$ es $\|\mathbf{u}\|=\sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}=\sqrt{u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}u_i^2}$.

— Si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.

— La proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ es el vector $\text{Proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}=\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\right)\mathbf{v}$ de la misma dirección que $\mathbf{v}$. El coeficiente de la proyección $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$ se llama coeficiente de Fourier.

Interesa recordar que el vector del subespacio generado por el sistema ortogonal $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ *más próximo* a $\mathbf{u}$ es el vector resultado de proyectar $\mathbf{u}$ sobre ese susbespacio, es decir, el vector: $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1+\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2+\ldots+\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_n}{\mathbf{v}_n\cdot\mathbf{v}_n}\mathbf{v}_n$. Haremos uso de este hecho en las siguientes secciones de este guión.

■ Producto escalar de funciones periódicas de período 2π

El paso de vectores con un número de componentes que se puede contar a espacios vectoriales de funciones, donde los vectores son funciones y sus componentes, las imágenes, varían en un continuo obliga a sustituir sumas por integrales.

Vamos a considerar *el espacio vectorial* $PC(2\pi)$ *de todas las funciones de período* 2π, *continuas en* $[-\pi,\pi]$ *salvo a lo sumo en un número finito de puntos de discontinuidad de salto finito*. Las operaciones del espacio vectorial son la suma de imágenes y el producto por reales que ya conocemos. Son vectores de este espacio vectorial las funciones $\cos t$, $\sin t$, y todas las de la forma $\cos(nt)$ y $\sin(nt)$ con $n=0,1,2,3,\ldots$.

El ***producto escalar*** de dos funciones f y g de $PC(2\pi)$ es $\boxed{f\cdot g=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)g(t)\,dt}$.

Al igual que en el caso de $\mathbb{R}^n$, el producto escalar definido en $PC(2\pi)$ lleva a las siguientes fórmulas:

— La ***longitud o norma*** de f es $\boxed{\| f \| = \sqrt{f \cdot f} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)]^2\,dt}}$.

— Si $f \cdot g = 0$, entonces f y g son ortogonales.

— La ***proyección ortogonal*** de f sobre g es la función $\boxed{\frac{f \cdot g}{g \cdot g}\,g(t) = \left(\frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt}{\int_{-\pi}^{\pi}[g(t)]^2\,dt}\right) g(t)}$

Afirmamos que, con este producto escalar, las funciones:

$$\{1, \cos t, \sin t, \cos(2t), \sin(2t), \ldots, \cos(nt), \sin(nt)\}$$

forman un sistema ortogonal y, además, tienen norma uno salvo la primera.

2. Ejercicios

Ejercicio 8: Comprueba con *Mathematica* que las funciones 1, $\cos t$, $\sin t$, $\cos(43t)$.

a) Son ortogonales entre sí.
b) Tienen longitud uno, excepto la función constante 1, cuya longitud es …………

Ejercicio 9: Vamos a trabajar con los armónicos $50\sin t$ y $25\sin(3t)$. Responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la norma o longitud de las funciones: $50\sin t$ y $25\sin(3t)$?, y ¿su amplitud?
b) ¿Son ortogonales entre sí los armónicos $50\sin t$ y $25\sin(3t)$?
c) Averigua por qué la longitud de $I(t) = 50\sin t + 25\sin(3t)$ es $\|I(t)\| = \sqrt{50^2 + 25^2}$.