PRÁCTICA 12: APROXIMACIONES DE FOURIER II

I. Función periódica de período 2π

1. Información básica

En esta sección manejamos sólo funciones del espacio euclídeo $PC(2\pi)$, espacio de todas las funciones de período 2π, continuas en $(-\pi,\pi)$ salvo a lo sumo en un número finito de puntos de discontinuidad de salto finito. Y consideramos el sistema ortogonal: $S=\{1,\cos t,\sin t,\cos(2t),\sin(2t),\ldots,\cos(nt),\sin(nt)\}$.

■ Polinomio de Fourier en forma trigonométrica

La función f es una función periódica del espacio $PC(2\pi)$. El polinomio trigonométrico de orden n que más se aproxima a f es la suma de las proyecciones de f sobre cada una de las funciones de ese sistema ortogonal. Este polinomio $F_n(t)$ se llama *la aproximación de Fourier de* f *de orden* n. $F_n(t)$ es el polinomio trigonométrico de orden n, suma de armónicos de frecuencias 1, 2, … , n:

$$\boxed{\begin{aligned} F_n(t) &= \frac{a_0}{2}+\underbrace{a_1\cos t+b_1\sin t}_{\text{armónico de frecuencia 1}}+\underbrace{a_2\cos 2t+b_2\sin 2t}_{\text{armónico de frecuencia 2}}+\ldots\ldots+\underbrace{a_n\cos nt+b_n\sin nt}_{\text{armónico de frecuencia } n}=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\underbrace{a_k\cos kt+b_k\sin kt}_{\text{armónico de frecuencia } k}\right)= \\ &=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\underbrace{A_k\sin\left(kt-\varphi_k\right)}_{\text{armónico de frecuencia } k}\right)\end{aligned}}$$

cuyos coeficientes se calculan aplicando la fórmula de los coeficientes de la proyección ortogonal $\dfrac{f\cdot g}{g\cdot g}$. Resultan las siguientes fórmulas:

$$\boxed{a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt};$$

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t\,dt, \qquad b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin t\,dt,$$

$$a_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos 2t\,dt, \qquad b_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin 2t\,dt,$$

…………………………………………………………………

y en general, $$\boxed{a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt}, \qquad \boxed{b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt}.$$

Una observación antes de abordar algún ejemplo. Puesto que la obtención de los coeficientes de las aproximaciones de Fourier exige el cálculo de integrales, recordamos algunas propiedades del cálculo integral de gran utilidad en este contexto:

a) Si f es una función periódica de período 2π, entonces el valor de su integral es el mismo en cualquier intervalo de amplitud 2π: $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \int_{a}^{a+2\pi} f(t)\,dt$.

b) Si f es una función par, entonces: $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt$.

c) Si f es una función impar, entonces: $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$.

2. Ejercicios

Ejercicio 1: *Aproximaciones de Fourier de una onda rectangular*

Considera la onda rectangular resultado de extender periódicamente $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \le t < 0 \\ 1, & \text{si } 0 \le t < \pi \end{cases}$. Estudia con detenimiento los siguientes apartados.

1. Dibuja la gráfica de tres ondas.

2. Calcula los coeficientes de Fourier.

— Como la onda rectangular es nula en el intervalo $[-\pi, 0]$, entonces la constante $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dt$ vale 1.

— Por la misma razón, las fórmulas de los coeficientes a_n y b_n se reducen a:

```
a[n_] = 1/π ∫_0^π Cos[n*t] dt ,          b[n_] = 1/π ∫_0^π Sin[n*t] dt
```

que resultan: $\frac{\text{Sin}[n\,\pi]}{n\,\pi}$, $\frac{\frac{1}{n} - \frac{\text{Cos}[n\,\pi]}{n}}{\pi}$.

Observa que $a_n = \frac{\sin n\pi}{n\pi} = 0$ y que $b_n = \begin{cases} 0, & \text{cuando } n \text{ es par} \\ \frac{2}{n\pi}, & \text{cuando } n \text{ es impar} \end{cases}$.

Dibuja en el papel un gráfico de barras de los coeficientes obtenidos.

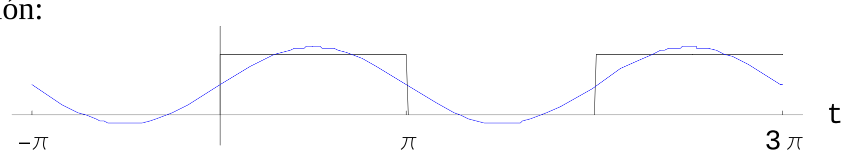
3. Obtengamos algunos polinomios trigonométricos y dibujémoslos junto a la onda rectangular:

— El *polinomio trigonométrico o aproximación de Fourier de orden uno* es

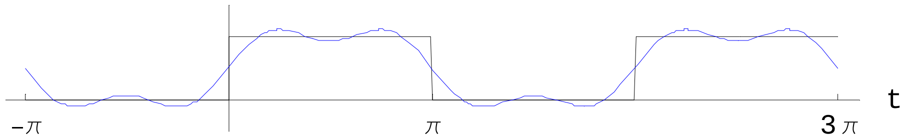
```
F1[t_] = 1/2 + a[1]*Cos[t] + b[1]*Sin[t]
```

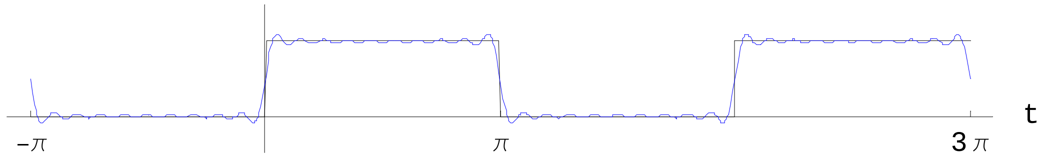
esto es, $\frac{1}{2} + \frac{2\,\text{Sin}[t]}{\pi}$

La gráfica conjunta de este polinomio trigonométrico junto a la onda rectangular está a continuación:



— Averigua cuál es el polinomio trigonométrico de orden tres y el de orden veinte. En la siguientes figuras están dibujados cada uno de esos polinomios junto a la onda rectangular en el intervalo de tiempos $t \in (-\pi, \pi]$.





Decide cuál es la gráfica de cada una de las aproximaciones de Fourier. ¿Va mejorando la aproximación a la onda rectangular?

Ejercicio 2: Considera la extensión periódica de $I(t) = t$, $t \in (-\pi, \pi]$. El resultado son ondas en diente de sierra.

a) Dibuja tres ondas completas empezando en $t = -3\pi$

b) Calcula, con ayuda del programa *Mathematica,* sus coeficientes de Fourier:

a. $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I(t)\,dt$; $\quad a[n\_] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I(t)\cos nt\,dt$; $\quad b[n\_] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I(t)\sin nt\,dt$

b. ¿Por qué todos los coeficientes $a[n]$ son nulos?

c. Dibuja en el papel los gráficos de barras de los coeficientes (¡sólo hasta $n = 10$!) .

c) Averigua cuál es la aproximación de Fourier de orden cinco, $F_5(t)$, y dibuja conjuntamente $I(t)$ y $F_5(t)$ en el dominio $t \in (-\pi, \pi]$.

d) Calcula la aproximación de Fourier de orden quince: $F_{15}(t)$. Dibújala en el mismo gráfico que $I(t)$ para $t \in (-\pi, \pi]$

e) $F_{15}(t)$ es la proyección de $I(t)$ sobre cierto subespacio, ¿cuál es ese subespacio?, ¿qué dimensión tiene?

f) ¿Cuánto valen $F_5(t)$ y $F_{15}(t)$ en el punto de discontinuidad $t = \pi$? Averigua el valor de $F_n(\pi)$ para cualquier n.

Ejercicio 3: Para la onda sinusoidal positiva $f(t) = 4|\sin t| = \underbrace{4Abs[Sin[t]]}_{Mathematica}$, se pide:

a) Calcula sus coeficientes de Fourier. ¿Por qué todos los coeficientes $b[n]$ son nulos?

Dibuja en el papel los gráficos de barras de los coeficientes (hasta $n = 10$)

b) Calcula las aproximaciones de Fourier de órdenes seis y diez: $F_6(t)$ y $F_{10}(t)$, y dibuja las tres funciones conjuntamente en el intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

Ejercicio 4: Considera la onda sinusoidal rectificada: $I(t) = \max\{\sin t, 0\} = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi \le t \le 0 \\ \sin t, & \text{si } 0 \le t \le \pi \end{cases}$.

a) Dibuja, a mano, dos ondas completas de $I(t)$ empezando en $t = 0$.

   Dibuja, usando el programa *Mathematica*, $I(t)$ en el período de tiempo de 0 a 12.56 segundos.

   Recuerda que en *Mathematica*, la expresión de esta onda es $I(t) = Max\left[Sin[t], 0\right]$.

b) Calcula la parte constante y los armónicos de frecuencias 1 hasta 6. ¿Cuáles son la amplitud y el desfase de cada uno de esos armónicos?

c) Determina el polinomio de Fourier de orden 6 de $I(t)$ y escríbelo en la forma:

$$\boxed{\begin{aligned} F_6(t) = \frac{a_0}{2} &+ A_1 \sin(t - \varphi_1) + A_2 \sin(2t - \varphi_2) + A_3 \sin(3t - \varphi_3) + \\ &+ A_4 \sin(4t - \varphi_4) + A_5 \sin(5t - \varphi_5) + A_6 \sin(6t - \varphi_6) \end{aligned}}$$

d) Dibuja en la mismo gráfico $I(t)$ y su aproximación de Fourier de orden 6, $F_6(t)$, en el periodo de tiempo de 0 a 12.56 segundos.

II. Función periódica de período T

1. Información básica

El trabajo que realizamos en esta sección es análogo al realizado en las dos secciones anteriores sobre funciones periódicas de período 2π: primero, definir un producto escalar para las funciones periódicas de período T y, después, construir las proyecciones o polinomios trigonométricos adecuados a este caso.

■ Producto escalar de funciones periódicas de período T

Ahora nos interesa *el espacio vectorial $PC(T)$ de todas las funciones de período T, continuas en un intervalo de amplitud el período, $(a, a+T)$, salvo a lo sumo en un número finito de puntos de discontinuidad de salto finito*. Son vectores de este espacio vectorial las funciones $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$, y todas las de la forma $\cos(n\omega t)$ y $\sin(n\omega t)$ con $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, siempre que la frecuencia angular sea $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. De la misma manera que en el caso de las funciones periódicas de período 2π, se define un producto escalar y los conceptos relacionados como sigue:

— El ***producto escalar*** de dos funciones f y g de $PC(T)$ es $\boxed{f \cdot g = \dfrac{1}{T/2} \displaystyle\int_a^{a+T} f(t) g(t)\, dt}$.

— La ***longitud o norma*** de f es $\| f \| = \sqrt{f \cdot f} = \sqrt{\dfrac{1}{T/2} \displaystyle\int_a^{a+T} [f(t)]^2\, dt}$.

— La ***proyección ortogonal*** de f sobre g es la función $\dfrac{f \cdot g}{g \cdot g}\, g(t) = \left(\dfrac{\int_a^{a+T} f(t) g(t)\, dt}{\int_a^{a+T} [g(t)]^2\, dt} \right) g(t)$.

— El sistema de funciones $\{1, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \cos(2\omega t), \sin(2\omega t), \ldots, \cos(n\omega t), \sin(n\omega t)\}$ es ortogonal. Además, todas tienen norma o longitud uno, salvo la primera ¿cuál es esa longitud distinta?

■ Aproximación de Fourier en forma trigonométrica

Supongamos que f está en el espacio euclídeo $PC(T)$ de todas las funciones de período T, continuas en $(a, a+T)$ salvo a lo sumo en un número finito de puntos de discontinuidad de salto finito y consideremos el sistema ortogonal:

$$\{1, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \cos(2\omega t), \sin(2\omega t), \ldots, \cos(n\omega t), \sin(n\omega t)\}.$$

La aproximación de Fourier de f de orden n es el siguiente polinomio trigonométrico de orden n:

$$\boxed{\begin{aligned} F_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \underbrace{a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t)}_{\text{armónico de frecuencia } \omega} + \underbrace{a_2\cos(2\omega t) + b_2\sin(2\omega t)}_{\text{armónico de frecuencia } 2\omega} + \ldots\ldots + \underbrace{a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)}_{\text{armónico de frecuencia } n\omega} = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\underbrace{a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)}_{\text{armónico de frecuencia } k\omega}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\underbrace{A_k\sin(k\omega t - \varphi_k)}_{\text{armónico de frecuencia } k\omega}\right)\end{aligned}}$$

Se trata del polinomio trigonométrico o de la combinación lineal de armónicos que más se aproxima a la onda f. Sus coeficientes se calculan aplicando fórmulas análogas al caso de las periódicas de período 2π:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T/2}\int_a^{a+T} f(t)\,dt};$$

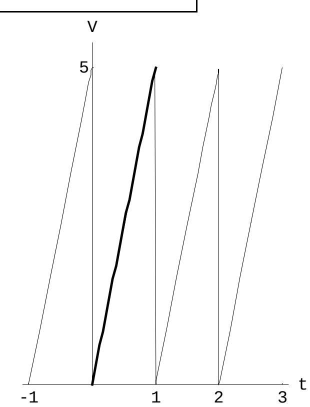
$$a_1 = \frac{1}{T/2}\int_a^{a+T} f(t)\cos(\omega t)\,dt, \qquad b_1 = \frac{1}{T/2}\int_a^{a+T} f(t)\sin(\omega t)\,dt,$$

$$a_2 = \frac{1}{T/2}\int_a^{a+T} f(t)\cos(2\omega t)\,dt, \qquad b_2 = \frac{1}{T/2}\int_a^{a+T} f(t)\sin(2\omega t)\,dt,$$

....

y en general, $$\boxed{a_n = \frac{1}{T/2}\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt}, \qquad \boxed{b_n = \frac{1}{T/2}\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt}.$$

2. Ejercicios



Ejercicio 5: *Aproximación de Fourier de una onda en diente de sierra de período $T = 1$.*

Consideramos en este ejemplo la onda resultado de extender periódicamente $V(t) = 5t$ para $t \in [0,1)$; al lado está la gráfica de cuatro ondas.

El período de esta onda es $T = 1$ segundo y, por tanto, su frecuencia angular es $\omega = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ radianes/segundo.

a. Averiguamos los coeficientes de Fourier de esta onda: Ejecuta las siguientes órdenes

```
a[0] = 1/(1/2) ∫_0^1 5 t dt          a[n_] = 1/(1/2) ∫_0^1 5 t * Cos[n * 2 π * t] dt
b[n_] = 1/(1/2) ∫_0^1 5 t * Sin[n * 2 π * t] dt
```

b. Calcula las aproximaciones de Fourier de órdenes 2, 3 y 10.
Ayuda: Para conseguir la aproximación de orden dos escribe la orden

```
F2[t_] = a[0]/2 + Sum_{n=1}^{2} (a[n] * Cos[n * 2 π * t] + b[n] * Sin[n * 2 π * t])
```

c. Dibuja conjuntamente la onda en diente de sierra y su aproximación de Fourier de orden tres en el intervalo $[0,1]$.

d. Dibuja en el papel los gráficos de barras de los coeficientes hasta el orden 2.
Calcula las amplitudes del primer y del segundo armónico.

Ejercicio 6: Considera la extensión periódica de $h(t) = \max\{t, 0\} = \underbrace{Max[t, 0]}_{Mathematica}$ en el intervalo $[-1,1]$, es decir, $h(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < t \le 0 \\ t, & \text{si } 0 < t \le 1 \end{cases}$. Se pide:

a) Dibuja a mano la onda básica $h(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < t \le 0 \\ t, & \text{si } 0 < t \le 1 \end{cases}$.

b) Calcula los coeficientes y el polinomio de Fourier de orden ocho $F_8(t)$.

c) Calcula la amplitud y el desfase de cada armónico. Dibuja en el papel un gráfico de barras de las amplitudes.

d) Dibuja conjuntamente la función periódica y su aproximación $F_8(t)$ en un intervalo de longitud dos veces el período.

Ejercicio 7: Considera la función $I(t)$ resultado de extender periódicamente el trozo de $I(t) = |t-1|$ definido en $[0,2]$.

a) Dibuja a mano la onda básica y extiéndela hasta dibujar tres períodos completos.

b) Averigua cuál es su aproximación de Fourier de orden ocho $F_8(t)$ y dibújala junto a la función periódica $I(t)$ en el intervalo $[0,2]$.