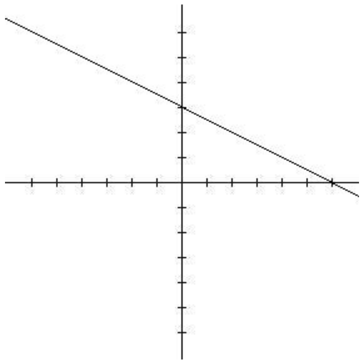
# Ejercicios resueltos

6.-1 Resolver las siguientes inecuaciones:

$a)\ x+2y \geq 6; \qquad b)\ 2x-y<5; \qquad c)\ 3x+2y \geq \dfrac{x-y}{2}+5$

### *Solución*

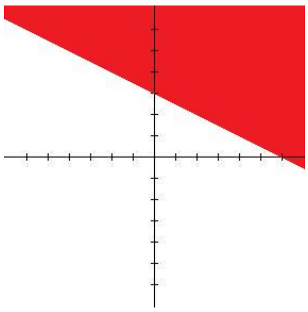
**a)** Se representa gráficamente la recta que define la igualdad, dando dos valores cualesquiera, por ejemplo



$$Si\ x=0\ \Rightarrow 0+2y=6 \Rightarrow y=\frac{6}{2}=3 \Rightarrow \text{El punto es el } (0,3)$$

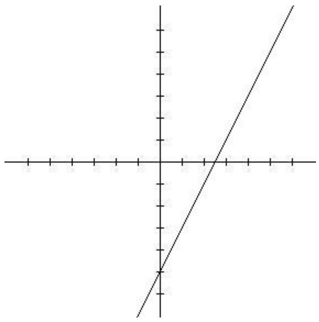
$$Si\ y=0\ \Rightarrow x+0=6 \Rightarrow x=6 \Rightarrow \text{El punto es el } (6,0)$$

Esta recta divide al plano en dos semiplanos, en uno de ellos la expresión x+2y es mayor que 6, en el otro es menor que 6. Probamos con un punto cualquiera que no está en la recta, si ese punto cumple la desigualdad, todo el semiplano en el que esté la cumple, en caso contrario, es el otro semiplano el que la cumple.



Probamos con el (0,0) $\Rightarrow$ 0 + 2·0 = 0 < 6, no cumple la desigualdad, por lo que la solución es el semiplano en el que no está (0,0) y se incluye la propia recta ya que la recta cumple la igualdad y la inecuación es x + 2y $\geq$ 6, por lo que la solución es la zona coloreada de rojo.

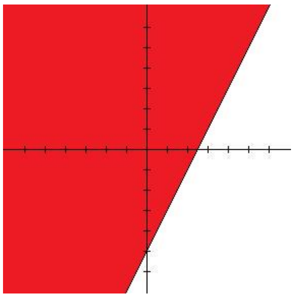
**b)** 2x – y < 5



Se representa la recta $r \equiv 2x-y=5$

| x | y |
|---|---|
| 0 | -5 |
| 2,5 | 0 |

Probamos con el (0,0) y vemos que 2·0-0=0<5, por lo que el (0,0) cumple la inecuación, luego el semiplano en el que está, coloreado de rojo, es la solución. En este caso la propia recta no es solución, ya que la desigualdad es estricta.



**c)** $3x+2y \geq \frac{x-y}{2}+5$

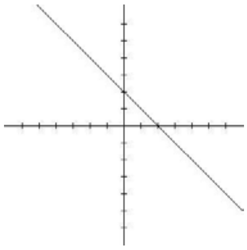
Operamos con la inecuación para pasarla a la forma a·x+b·y ≥ c

$$3x+2y \geq \frac{x-y}{2}+5 \Rightarrow \frac{6x}{2}+\frac{4y}{2} \geq \frac{x-y}{2}+\frac{10}{2} \Rightarrow 6x+4y \geq x-y+10$$

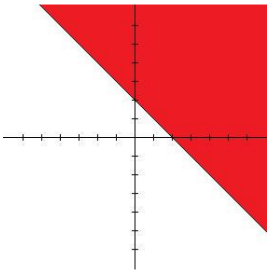
$$6x-x+4y+y \geq 10 \Rightarrow 5x+5y \geq 10 \Rightarrow x+y \geq 2$$

Dibujamos la recta dando valores

| x | y |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 2 | 0 |



Probamos con el punto (0,0) y vemos que 0+0=0<2, por lo que tenemos que elegir como solución el semiplano al que no pertenece el (0,0). La propia recta es también solución.



6.-2 Sea la función f(x, y) = 2x - y. Representar el conjunto $R=\{(x,y) \mid 2x+3y \leq 6,\ x-y \geq 0,\ y \geq 0\}$ y calcular el máximo y el mínimo de f(x, y) en el conjunto R.

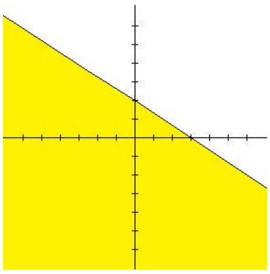
*Solución*

Representamos primero 2x + 3y ≤ 6. Para ello dibujamos la recta 2x + 3y =6. Damos valores:

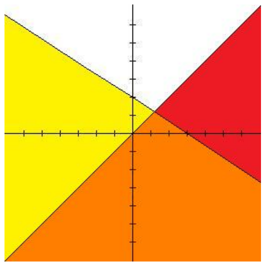
| x | y |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 3 | 0 |

Probamos con (0,0): 2·0+3·0=0<6

Por lo que obtenemos la zona coloreada.

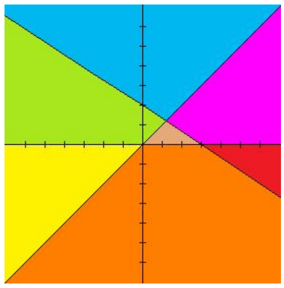


Hacemos lo mismo para representar x-y ≥ 0. Representamos x – y = 0



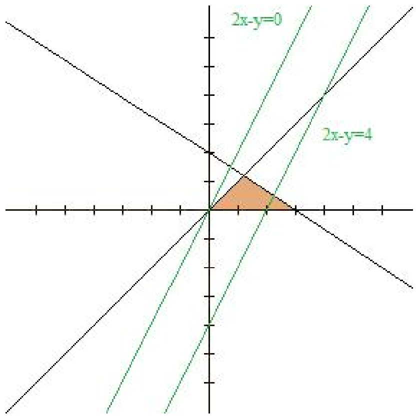
| x | y |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |

Con (0,0) no podemos probar porque está en la propia recta, por lo que probamos con (1,0) 1-0=1>0. Obteniendo la nueva zona coloreada.



Por último representamos y ≥ 0
La región R se corresponde con la zona coloreada de marrón.

Para hallar el máximo y el mínimo dibujamos dos niveles de la función 2x-y, para comprobar el sentido de avance de la función, por ejemplo 2x-y = 0; 2x-y = 4.




Comprobamos que el valor de la región donde la función alcanza el máximo es el punto (3,0) y donde alcanza el mínimo es el punto (0,0)

---

6.-3 Una distribuidora de café realiza dos tipos de mezclas, la primera contiene un 50% de café natural y 50% de café torrefacto, la segunda contiene tres partes de café natural por cada parte de café torrefacto. Se abastece diariamente con 1.000 Kg. de café torrefacto y 1.300 Kg. de café natural. Si el beneficio por cada kilo de la primera mezcla es de 1€ y por cada kilo de la segunda mezcla es de 0,9€, ¿cuántos kilos de cada mezcla debe fabricar para maximizar el beneficio?

***Solución***

Identificamos el problema como un problema de programación lineal ya que es una optimización sujeta a restricciones en términos de desigualdad.

Elegimos las variables, en este caso los elementos que varían son:

x = Número de kilogramos que debe fabricar de la primera mezcla
y = Número de kilogramos que debe fabricar de la segunda mezcla

La función objetivo es:

$$\text{Maximizar} \quad f(x, y) = x + 0{,}9\,y$$

Para plantear las restricciones utilizamos la siguiente tabla de disponibilidad de recursos

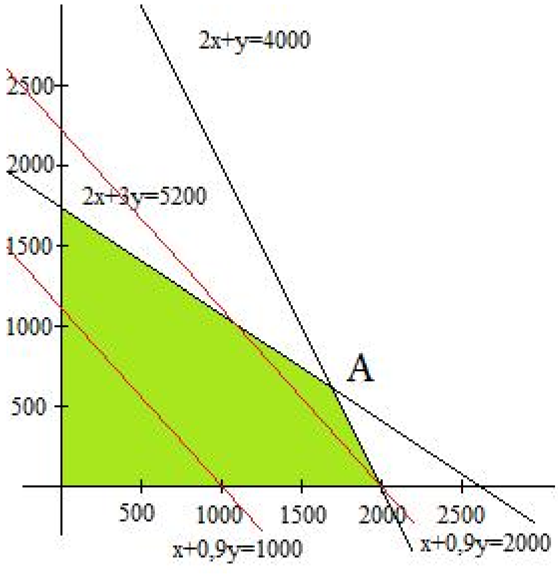
| | Mezcla 1 | Mezcla 2 | Disponibilidad |
|---|---|---|---|
| C. natural | 0,5 | 0,75 | 1.300 |
| C. Torrefacto | 0,5 | 0,25 | 1.000 |

Con lo que las restricciones, sin olvidarnos de las de no negatividad, son:

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}5x + 0{,}75y \le 1.300 \\ 0{,}5x + 0{,}25y \le 1.000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\} \text{multiplicando por 4} \quad \left.\begin{array}{r} 2x + 3y \le 5.200 \\ 2x + y \le 4.000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

Representamos la región factible y dibujamos dos niveles de la función objetivo para averiguar su sentido de avance, por ejemplo:

$x + 0{,}9y = 1.000$
$x + 0{,}9y = 2.000$




Con lo que comprobamos el sentido de avance de la función objetivo, viendo que el máximo se alcanza en el punto A. Para calcularlo resolvemos el sistema de ecuaciones que forman las rectas que determinan el punto.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y = 5.200 \\ 2x + y = 4.000 \end{array}\right\} \text{restando las ecuaciones}$$

$$2y = 1.200 \Rightarrow y = 600 \text{ sustituyendo en la segunda ecuación}$$

$$2x + 600 = 4.000 \Rightarrow 2x = 4.000 - 600 = 3.400 \Rightarrow x = 1.700$$

Por lo que deben fabricar 1.700 Kg. de la primera mezcla y 600 Kg. de la segunda mezcla, para un beneficio máximo de 1.700+0,9·600=2.240€

---

6.-4 Una empresa comercializa dos tipos de compuestos alimenticios para animales. El primero contiene 4 unidades del nutriente A y 2 unidades del nutriente B, el segundo contiene 2 unidades del nutriente A y 3 unidades del nutriente B. Se quiere conseguir una dieta que proporcione como mínimo 20 unidades de A y 18 unidades de B. Si el coste de una unidad del primer compuesto es de 2€ y del segundo es de 2,5€, calcular qué cantidad de cada tipo de compuesto hay que tomar para un coste mínimo.

***Solución***

Identificamos el problema como un problema de programación lineal ya que es una optimización sujeta a restricciones en términos de desigualdad.

Elegimos las variables, en este caso los elementos que varían son:

x = Unidades del primer compuesto
y = Unidades del segundo compuesto

La función objetivo es:

$$\text{Minimizar} \quad f(x, y) = 2x + 2{,}5y$$

Para plantear las restricciones utilizamos la siguiente tabla:

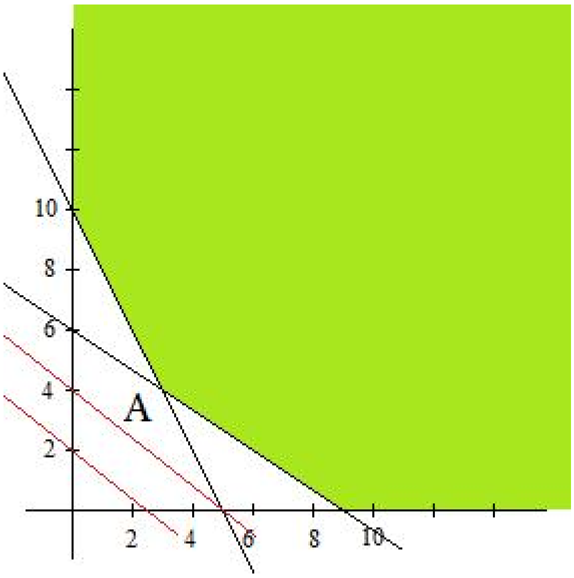
| | Compuesto 1 | Compuesto 2 | Requisitos |
|---|---|---|---|
| Nutriente A | 4 | 2 | 20 |
| Nutriente B | 2 | 3 | 18 |

Con lo que las restricciones, sin olvidarnos de las de no negatividad, son:

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 2y \geq 20 \\ 2x + 3y \geq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Representamos la región factible y dibujamos dos niveles de la función objetivo para averiguar su sentido de avance, por ejemplo:

$$2x + 2{,}5y = 5$$
$$2x + 2{,}5y = 10$$




Con lo que comprobamos el sentido de avance de la función objetivo, viendo que el mínimo se alcanza en el punto A.

Para calcularlo resolvemos el sistema de ecuaciones que forman las rectas que determinan el punto:

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 2y = 20 \\ 2x + 3y = 18 \end{array}\right\}$$

Restando a la primera ecuación la segunda multiplicada por 2:

$$-4y = -16 \Rightarrow y = 4 \text{ sustituyendo en la primera ecuación}$$
$$4x + 8 = 20 \Rightarrow 4x = 20 - 8 = 12 \Rightarrow x = 3$$

Por lo que debe tomar 3 unidades del primer compuesto y 4 unidades del segundo compuesto.

6.-5 Un comerciante dispone de 200 jamones y 300 botellas de vino con los que realizar dos tipos de lotes navideños. El lote tipo A consta de dos jamones y dos botellas de vino y el lote tipo B consta de 1 jamón y 3 botellas de vino. Si el beneficio por cada lote A es de 30€ y por cada lote B de 15€, ¿cuántos lotes de cada tipo debe preparar para conseguir un beneficio máximo?

## *Solución*

Identificamos el problema como un problema de programación lineal ya que es una optimización sujeta a restricciones en términos de desigualdad.

Elegimos las variables, en este caso los elementos que varían son:

x = Número de lotes tipo A
y = Número de lotes tipo B

La función objetivo es:

$$\text{Maximizar} \quad f(x, y) = 30x + 15y$$

Para plantear las restricciones utilizamos la siguiente tabla:

| | Lote A | Lote B | Disponibilidad |
|---|---|---|---|
| Jamones | 2 | 1 | 200 |
| Botellas | 2 | 3 | 300 |

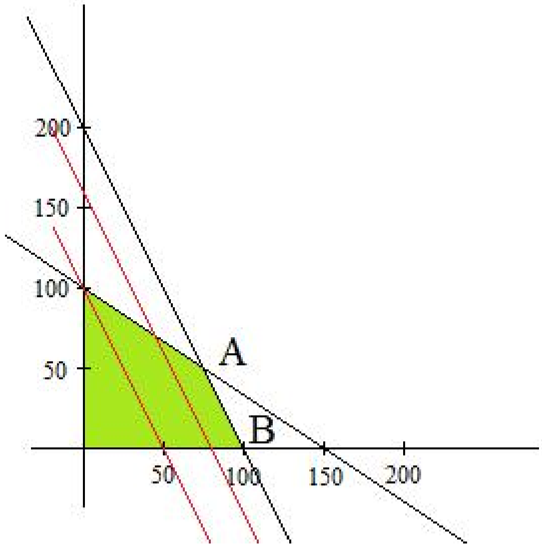
Con lo que las restricciones, sin olvidarnos de las de no negatividad, son:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y \leq 200 \\ 2x + 3y \leq 300 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Representamos la región factible y dibujamos dos niveles de la función objetivo para averiguar su sentido de avance, por ejemplo:

$30x + 15y = 1.500$

$30x + 15y = 2.400$




Con lo que comprobamos el sentido de avance de la función objetivo, viendo que parece que la función objetivo es paralela a una de las restricciones.

Para comprobarlo, observamos que los coeficientes de las variables en la restricción 2x+y=200 y en la función objetivo f(x, y)=30x+15y son proporcionales. Por lo que el máximo se alcanza en cualquier valor del segmento AB de la recta 2x+y=200.

Para calcular A resolvemos el sistema de ecuaciones que forman las rectas que lo determinan.

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 200 \\ 2x + 3y &= 300 \end{aligned}\right\}$$

Restando a la primera ecuación la segunda:

$$-2y = -100 \Rightarrow y = 50 \text{ sustituyendo en la primera ecuación}$$
$$2x + 50 = 200 \Rightarrow 2x = 200 - 50 = 150 \Rightarrow x = 75$$

Por lo que obtendrá el beneficio máximo siempre que prepare entre 75 y 100 lotes tipo A y el resto tipo B.